Ο Βέλτιστος Έλεγχος στα Οικονομικά των Φυσικών Πόρων

Γιώργος Παπαγεωργίου
Τμήμα Λογιστικής, Τ.Ε.Ι. Λάρισας
gjpap@otenet.gr

Περίληψη
Τις τελευταίες δεκαετίες έχει γίνει μια σημαντική πρόοδος όσον αφορά τη δυναμική συμπεριφορά των οικονομικών υποδειγμάτων. Τα δυναμικά οικονομικά υποδείγματα χωρίζονται σε δύο ευρείες κατηγορίες. Μία είναι εκείνη πού ένας κοινωνικός σχεδιαστής ή λήπτης απόφασης μετέχει σε ένα πρόβλημα λήψης βέλτιστης απόφασης. Η δεύτερη κατηγορία είναι εκείνη η κατάσταση πού μετέχουν περισσότεροι του ενός οικονομικά δρώντες και καθένας προσπαθεί να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητά του. Η ισορροπία των οικονομικών αυτών καταστάσεων ορίζεται σαν εκείνη η χρονική διαδρομή πού κανένας εκ των μετεχόντων δεν έχει κίνητρο απόκλισης από τη διαχρονική στρατηγική του απόφαση αυτή.
Στο παρόν άρθρο εξετάζουμε τη δυναμική βελτιστοποίηση ειδικότερα το πώς η μεθοδολογία του βέλτιστου ελέγχου εφαρμόζεται στα οικονομικά. Κατ' αρχή θέτουμε το πλαίσιο ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου και εκθέτουμε τις ικανές συνθήκες μεγιστοποίησης. Στη συνέχεια εξετάζουμε τη διασύνδεση πού υπάρχει μεταξύ των ικανών συνθηκών και των κρίσιμων μεταβλητών ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου.
*Δίνουμε μια οικονομική ερμηνεία της αρχής του μέγιστου του **Pontryagin**, μέσω ενός υποδείγματος συσσώρευσης ρύπων από μια επιχείρηση εξαιτίας της παραγωγικής της διαδικασίας.*
Στη συνέχεια εξάγουμε τις αναγκαίες συνθήκες προκειμένου να διασφαλιστεί η καθολικότητα της μεθοδολογίας.
Τέλος προτείνουμε ένα υπόδειγμα βέλτιστης κατανάλωσης μιας παραγωγικής επιχείρησης. Υποθέτουμε μια επιχείρηση πού χρησιμοποιεί κατά την παραγωγική της διαδικασία τις εισροές κεφάλαιο και ένα εξαντλούμενο πόρο πού εξάγεται. Ο σκοπός της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση της ωφέλειάς της η οποία έχει την εξειδίκευση της λογαριθμικής μορφής. Κατά την επίλυση του υποδείγματος βρίσκουμε ότι ο λόγος των χρονικών διαδρομών των χρησιμοποιούμενων εισροών είναι μια φθίνουσα συνάρτηση. Ακόμα εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η συσχέτιση της εισροής κεφάλαιο και του παραγόμενου προϊόντος μεγενθύνεται γραμμικά με σταθερό ρυθμό.

Εισαγωγή

Οι περιορισμοί της μεθόδου του λογισμού μεταβολών[1], όπως είναι η απαίτηση της συνεχούς διαφορισιμότητας της μεταβλητής κατάστασης, αντιμετωπίζονται με την πιο εξελιγμένη μέθοδο της δυναμικής βελτιστοποίησης, αυτής του βέλτιστου ελέγχου. Η μεθοδολογία του βέλτιστου ελέγχου δίνει ιδιαίτερη σημασία, όπως το όνομά της δηλώνει, σε μια ή και περισσότερες μεταβλητές ελέγχου πού γίνονται πλέον τα όργανα της δυναμικής βελτιστοποίησης. Κατά την επίλυση ενός προβλήματος δυναμικής βελτιστοποίησης με την μέθοδο του βέλτιστου ελέγχου, στόχος είναι να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή της μεταβλητής ελέγχου και στη συνέχεια, εφόσον έχει προηγούμενα συσχετισθεί η μεταβλητή αυτή με την μεταβλητή κατάστασης, είναι εύκολο να

[1] Ο λογισμός μεταβολών είναι μια κλασική μαθηματική μέθοδος πού τον τελευταίο αιώνα έχει ευρέως εφαρμοστεί για την επίλυση οικονομικών υποδειγμάτων. Τα πλέον γνωστά οικονομικά υποδείγματα πού έχουν επιλυθεί με λογισμό μεταβολών είναι το υπόδειγμα της βέλτιστης αποταμίευσης του Ramsey (1928) και το υπόδειγμα του Hotelling (1932) στα οικονομικά των εξαντλούμενων πόρων

προσδιοριστεί η βέλτιστη διαδρομή της τελευταίας. Το κύριο ερωτηματικό πού γεννάται σε ένα τέτοιο πρόβλημα είναι ποιο είναι εκείνο το χαρακτηριστικό πού κάνει μια μεταβλητή, «μεταβλητή ελέγχου». Για να επιδείξουμε αυτό το γεγονός θεωρούμε το υπόδειγμα Hotelling της εξαγωγής ενός εξαντλούμενου πόρου. Αν $S(t=0)=S_0$, είναι το αρχικό απόθεμα του πόρου αυτού, τότε η εξαγωγή μειώνει το απόθεμα σύμφωνα με την εξίσωση.

$$\frac{dS(t)}{dt}=-E(t) \qquad (1)$$

όπου με $E(t)$ συμβολίζουμε το ρυθμό εξαγωγής στον χρόνο t. Η μεταβλητή $E(t)$ είναι μια μεταβλητή ελέγχου, καθόσον επηρεάζει άμεσα την μεταβλητή κατάστασης (το απόθεμα του πόρου) μέσω της προηγούμενης διαφορικής εξίσωσης και κυρίως μπορεί να καθοδηγηθεί αφού γίνεται, σε κάθε χρονική στιγμή, δείκτης του αποθέματος. Φανερά η βελτιστοποίηση της χρονικής διαδρομής της μεταβλητής ελέγχου, $E(t)$, έμμεσα σημαίνει βελτιστοποίηση της χρονικής διαδρομής της μεταβλητής κατάστασης $S(t)$. Συνεπώς η μεταβλητή ελέγχου είναι παράμετρος της συνάρτησης χρησιμότητας U, δηλαδή μπορεί να εισαχθεί στο προς μεγιστοποίηση αντικειμενικό συναρτησιακό. Ο περιορισμός του υποδείγματος είναι η εξίσωση εξάντλησης του αποθέματος. Με αυτή την οπτική το πρόβλημα της βέλτιστης κοινωνικά εξαγωγής του υποδείγματος Hotelling μπορεί να εκφραστεί ως:

Μεγιστοποίηση $\int_0^T U(E)e^{-rt}dt$

Με περιορισμό $\frac{dS(t)}{dt}=\dot{S}=-E(t)$

και $S(0)=S_0$

Γενικευμένη Τυποποίηση του Βέλτιστου Ελέγχου

Βασιζόμενοι στην προηγούμενη θεώρηση το πιο απλό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου μπορεί να εκφραστεί στη γενική του μορφή ως:

μεγιστοποίηση $V=\int_0^T F(t,x,u)dt \qquad (2)$

με περιορισμούς $\dot{x}=f(t,x,u)$

και $x(0)=A \quad x(T)$ ελεύθερο με A,T δεδομένα

όπου οι μεταβλητές x,u είναι οι μεταβλητές κατάστασης και ελέγχου αντίστοιχα, F το προς μεγιστοποίηση αντικειμενικό συναρτησιακό πού συνήθως σε οικονομικές εφαρμογές είναι μια συνάρτηση χρησιμότητας η μια συνάρτηση κερδών. Η συνάρτηση f πού εισάγεται στον περιορισμό είναι αυτή πού περιγράφει την κίνηση της μεταβλητής κατάστασης x. Η σύνδεση μεταξύ των μεταβλητών κατάστασης και ελέγχου γίνεται μέσω της διαφορικής εξίσωσης του περιορισμού.
Στη συνέχεια θα δείξουμε το πώς η σύνδεση του βέλτιστου ελέγχου με τον λογισμό μεταβολών είναι φανερή.

Θεωρούμε την περίπτωση ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου όταν η επιλογή της μεταβλητής ελέγχου παίρνει την ειδική μορφή $\dot{x}=u$
Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου τότε είναι σύμφωνα με την (2)

μεγιστοποίηση $V=\int_0^T F(t,x,u)dt$

με περιορισμούς $\dot{x}=u$

και $x(0)=A \quad x(T)$ ελεύθερο με A,T δεδομένα

Αντικαθιστώντας την εξίσωση κίνησης στην ολοκληρωτέα συνάρτηση το πρόβλημα ξαναγράφεται ως:

Μεγιστοποίηση $V=\int_0^T F(t,x,\dot{x})dt$

με περιορισμούς $x(0)=A \quad x(T)$ ελεύθερο με A,T δεδομένα

το οποίο ακριβώς είναι ένα πρόβλημα λογισμού μεταβολών πού εξετάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η Αρχή του Μέγιστου

Η αρχή του μέγιστου[2] είναι μια αναγκαία συνθήκη βελτιστότητας για προβλήματα βέλτιστου ελέγχου. Είναι μια συνθήκη Α′ τάξης, όπως η συνθήκη ότι το ανάδελτα (gradient) μιας συνάρτησης $g:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ισούται με μηδέν στο τοπικό μέγιστο της g. Είναι γνωστό, ότι η τελευταία συνθήκη ικανοποιείται σε τοπικά ελάχιστα και άλλα τοπικά ακρότατα σημεία. Μόνο αν υπάρχει κάποια επιπλέον πληροφορία για την ολική καμπυλότητα της g (όπως είναι η κοιλότητα), μπορούμε να αποφασίσουμε, μέσω της συνθήκης $g'(x)=0$, ότι το x είναι ένα καθολικό μέγιστο. Η κατάσταση αυτή είναι παρόμοια με την περίπτωση του βέλτιστου ελέγχου. Ακόμα και αν μια διαδρομή ελέγχου $u(.)$ ικανοποιεί την αρχή του μέγιστου, δεν συνεπάγεται ότι είναι και μια βέλτιστη διαδρομή. Αν το πρόβλημα έχει ιδιότητες κοιλότητας, τότε μόνο μια διαδρομή ελέγχου πού ικανοποιεί την αρχή του μέγιστου, είναι μια βέλτιστη διαδρομή.

Η βοηθητική (co - state) μεταβλητή

Υπάρχουν τρεις τύποι μεταβλητών πού μετέχουν στο πρόβλημα μεγιστοποίησης (2): η μεταβλητή του χρόνου t, η μεταβλητή κατάστασης x, και η μεταβλητή ελέγχου u. Κατά τη διαδικασία επίλυσης όμως θα χρειαστεί και η εμπλοκή μιας επιπλέον βοηθητικής (co - state) μεταβλητής πού θα τη συμβολίζουμε με $\lambda(t)$. Η βοηθητική αυτή μεταβλητή είναι ένα είδος Lagrange πολλαπλασιαστή και ουσιαστικά είναι η σκιώδης τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής κατάστασης σε όλες τις χρονικές στιγμές της.

[2] Η αρχή του μέγιστου θεμελιώθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1950 με τα σημαίνοντα άρθρα του Σοβιετικού μαθηματικού Pontryagin (1952) και των συνεργατών του.

Η εξίσωση μέσω της οποίας εισάγεται η βοηθητική μεταβλητή $\lambda(t)$, σε ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, είναι η Hamiltonian συνάρτηση πού καταλαμβάνει τον πρωταρχικό ρόλο στην επίλυση ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου. Η Hamiltonian συμβολίζεται με H και ορίζεται ως:

$$H(t,x,u,\lambda) = F(t,x,u) + \lambda(t) f(t,x,u) \qquad (3)$$

Αναγκαίες Συνθήκες της Αρχής του Μέγιστου

Σε αντίθεση με την μέθοδο του λογισμού μεταβολών και την εξίσωση Euler πού είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς τη μεταβλητή κατάστασης x, η αρχή του μέγιστου χρησιμοποιεί δύο διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης για τις μεταβλητή κατάστασης $x(t)$ και για τη βοηθητική μεταβλητή $\lambda(t)$. Η επιπρόσθετη απαίτηση είναι η Hamiltonian να μεγιστοποιείται ως προς τη μεταβλητή ελέγχου u σε κάθε χρονική στιγμή.

Για το πρόβλημα μεγιστοποίησης (2) και έχοντας ορίσει τη Hamiltonian (3) οι συνθήκες της αρχής του μέγιστου είναι:

$$\begin{aligned} &\underset{u}{Max}\, H(t,x,u,\lambda) \qquad (\forall t \in [0,T]) \\ &\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ &\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &\lambda(T) = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Η πρώτη συνθήκη σημαίνει ότι η Hamiltonian μεγιστοποιείται ως προς τη μεταβλητή ελέγχου u και ένας εναλλακτικός τρόπος παρουσίασης θα μπορούσε να είναι ο εξής:

$$H(t,x,u^*,\lambda) \geq H(t,x,u,\lambda) \qquad (\forall t \in [0,T]) \quad (5)$$

με u^* έχει συμβολιστεί η βέλτιστη διαδρομή ελέγχου, ενώ με u οποιαδήποτε άλλη διαδρομή ελέγχου.
Η δεύτερη συνθήκη δεν είναι παρά η επαναδιατύπωση της εξίσωσης κίνησης της μεταβλητής κατάστασης εκφρασμένη μέσω της βοηθητικής μεταβλητής λ.
Η τρίτη συνθήκη είναι η έκφραση της βοηθητικής μεταβλητής λ μέσω της μεταβλητής κατάστασης x.
Οι δύο τελευταίες συνθήκες συνιστούν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων ή το Hamiltonian σύστημα για το δεδομένο πρόβλημα (2).

Η τελευταία συνθήκη της (4) είναι η συνθήκη διασταύρωσης για προβλήματα ελεύθερης τερματικής κατάστασης.

Μια τεκμηρίωση της Αρχής του Μέγιστου

Έχοντας διατυπώσει την Αρχή του Μέγιστου μπορούμε να εξετάσουμε βαθύτερα την παραγωγή των συνθηκών μεγιστοποίησης δηλαδή τις συνθήκες (4) καθώς και τη διασύνδεση των κρίσιμων μεταβλητών μεταξύ τους.

Ξεκινώντας από την εξίσωση κίνησης παρατηρούμε ότι η ποσότητα $f(t,x,u)-\dot{x}$ παίρνει μηδενική τιμή για όλα τα t εντός του διαστήματος $[0,T]$, συνεπώς κάνοντας χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange για κάποια χρονική στιγμή t η έκφραση $\lambda(t)\{f(t,x,u)-\dot{x}\}$ λαμβάνει μηδενική τιμή. Ολοκληρώνουμε για όλο το χρονικό διάστημα $[0,T]$, έχουμε:

$$\int_0^T \lambda(t)\{f(t,x,u)-\dot{x}\}dt = 0 \qquad (6)$$

Χωρίς απώλεια της γενικότητας της λύσης εισάγουμε το νέο αντικειμενικό συναρτησιακό

$$\mathcal{V} = V + \int_0^T \lambda(t)\{f(t,x,u)-\dot{x}\}dt = \int_0^T \{F(t,x,u)+\lambda(t)\{f(t,x,u)-\dot{x}\}\}dt \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας τη Hamiltonian (3) στην (7) έχουμε

$$\mathcal{V} = \int_0^T \{H(t,x,u,\lambda)-\lambda(t)\dot{x}\}dt = \int_0^T H(t,x,u,\lambda)dt - \int_0^T \lambda(t)\dot{x}dt \qquad (8)$$

Ολοκληρώνοντας το δεύτερο μέλος της (8) ως εξής :

Θέτουμε $u=\lambda(t) \Rightarrow du = \frac{d\lambda(t)}{dt}dt = \dot{\lambda}dt$

και $w = x(t) \Rightarrow dw = \frac{dx}{dt}dt = \dot{x}dt$

τότε εφόσον, $\lambda(t)\dot{x}dt = udw$ έχουμε

$$-\int_0^T \lambda(t)\dot{x}dt = -\left[\lambda(t)x(t)\right]_0^T + \int_0^T x(t)\dot{\lambda}dt = -\lambda(T)x_T + \lambda(0)x_0 + \int_0^T x(t)\dot{\lambda}dt$$

Το αντικειμενικό συναρτησιακό (8) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\mathcal{V} = \int_0^T \{H(t,x,u,\lambda)+x(t)\dot{\lambda}\}dt - \lambda(T)x_T + \lambda(0)x_0 \qquad (9)$$

Διαφορίζοντας τη Hamiltonian ως προς τη βοηθητική μεταβλητή λ προκύπτει η πρώτη εκ των συνθηκών μεγιστοποίησης (4).

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \qquad (10)$$

Εξετάζουμε τώρα την επίδραση της μεταβλητής ελέγχου $u(t)$ στη διαδρομή κατάστασης $x(t)$ κάνοντας χρήση της θεωρίας διαταραχών.

Αν έχουμε μια γνωστή διαδρομή ελέγχου $u^*(t)$ και τη διαταράξουμε με μία διαταρακτική καμπύλη $p(t)$ δημιουργούμε γειτονικές διαδρομές της μεταβλητής ελέγχου.

Συνεπώς: $u(t)=u^*(t)+\varepsilon p(t)$ (11)

Σύμφωνα με την εξίσωση κίνησης $\dot{x}=f(t,x,u)$ κάθε διαταραχή της διαδρομής ελέγχου $u(t)$ επιδρά διαταρακτικά και στη μεταβλητή κατάστασης $x^*(t)$. Οι γειτονικές διαδρομές της διαδρομής κατάστασης $x(t)$ γίνονται

$$x(t)=x^*(t)+\varepsilon q(t) \qquad (12)$$

Αν οι T, x_T είναι μεταβλητές μετά την διαταραχή αυτές γίνονται

$$T=T^*+\varepsilon\Delta T \Rightarrow \frac{dT}{d\varepsilon}=\Delta T \qquad x_T=x_T^*+\varepsilon\Delta x_T \Rightarrow \frac{dx_T}{d\varepsilon}=\Delta x_T \qquad (13)$$

Εκφράζουμε τη συνάρτηση V (9) με όρους του ε.

$$V=\int_0^{T(\varepsilon)}\left\{H\left[t, x^*+\varepsilon q(t), u^*+\varepsilon p(t), \lambda\right]+\dot{\lambda}\left[x^*+\varepsilon q(t)\right]\right\}dt-\lambda(T)x_T+\lambda(0)x_0 \qquad (14)$$

Εφαρμόζουμε στην (14) τη συνθήκη μεγιστοποίησης $\frac{dV}{d\varepsilon}=0$

Το ολοκλήρωμα αρχικά μετά την παραγώγιση γίνεται

$$\int_0^{T(\varepsilon)}\left[\frac{\partial H}{\partial x}q(t)+\frac{\partial H}{\partial u}p(t)+\dot{\lambda}q(t)\right]dt+\left[H+\dot{\lambda}x\right]_{t=T}\frac{dT}{d\varepsilon} \qquad (15)$$

Ενώ η παράγωγος του δεύτερου όρου γίνεται

$$-\lambda(T)\frac{dx_T}{d\varepsilon}-x_T\frac{d\lambda(T)}{dT}\frac{dT}{d\varepsilon}=-\lambda(T)\Delta x_T-x_T\dot{\lambda}(T)\Delta T \qquad (16)$$

Ο όρος $\left[\dot{\lambda}x\right]_{t=T}\frac{dT}{d\varepsilon}$ γράφεται ως $\left[\dot{\lambda}x\right]_{t=T}\frac{dT}{d\varepsilon}=\dot{\lambda}(T)x_T\Delta T$

Η συνθήκη μεγιστοποίησης $\frac{dV}{d\varepsilon}$ είναι το άθροισμα των εκφράσεων (15),(16)

$$\frac{dV}{d\varepsilon}=\int_0^T\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}\right)q(t)+\frac{\partial H}{\partial u}p(t)\right]dt+\left[H\right]_{t=T}\Delta T-\lambda(T)\Delta x_T=0 \qquad (17)$$

Για να ισχύει η (17) πρέπει καθένας όρος (εκτός των διαταρακτικών καμπύλων $p(t), q(t)$) να είναι μηδενικός, συνεπώς

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial H}{\partial u}=0$$

Επίσης ό όρος $\Delta T=0$, ενώ για να ισχύει $-\lambda(T)\Delta x_T=0$, επιβάλλουμε τη συνθήκη διασταύρωσης $\lambda(T)=0$.

Στη συνέχεια θα δώσουμε την οικονομική ερμηνεία των μεταβλητών της Αρχής του Μέγιστου εφαρμόζοντας ένα απλό υπόδειγμα μιας επιχείρησης πού μεγιστοποιεί τις προεξοφλημένες ροές κερδών της, αλλά ταυτόχρονα αποθέτει και ένα απόθεμα ρύπανσης πού οφείλεται στις εκπομπές ρύπων λόγω της παραγωγικής διαδικασίας.

Μια Οικονομική Ερμηνεία της Αρχής του Μέγιστου

Θεωρούμε μια επιχείρηση πού μεγιστοποιεί τα συνολικά της κέρδη σε κάποια χρονική περίοδο, συσσωρεύοντας παράλληλα ένα απόθεμα ρύπανσης πού δημιουργείται από τις εκπομπές ρύπων κατά την παραγωγική της διαδικασία.

Κάνουμε τις ακόλουθες παραδοχές:

α) Για κάθε χρονική περίοδο t, μεταφέρεται από την προηγούμενη ένα απόθεμα ρύπανσης, $s(t)$.

β) Δοθέντος αυτού του αποθέματος ρύπανσης η επιχείρηση λαμβάνει κάποιες αποφάσεις, $x(t)$, πού μπορεί να είναι για παράδειγμα η παραγωγή προϊόντος, οι τιμές διάθεσης του προϊόντος κλπ.

γ) Δοθέντων των $s(t)$, $x(t)$ η επιχείρηση απολαμβάνει μια σειρά ωφελειών ανά χρονική μονάδα. Συμβολίζουμε τα οφέλη αυτά ως $w(s(t),x(t),t)$.

Εξετάζουμε τώρα την κατάσταση σε χρονική στιγμή t, και συμβολίζουμε ως $W(s(t),x,t)$ τη συνολική ροή των κερδών καθ' όλο το χρονικό διάστημα $[t,T]$, δηλαδή

$W(s(t),\vec{x},t)=\int_t^T u(s(t),x(t),t)\,dt$ όπου με x έχουμε συμβολίσει τη χρονική διαδρομή της μεταβλητής x, από το χρόνο t έως T.

Η επιχείρηση επιλέγει τη μεταβλητή ελέγχου $x(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή, αλλά δεν είναι δυνατόν να επιλέξει ανεξάρτητα το απόθεμα ρύπανσης, $s(t)$, την ίδια χρονική στιγμή. Η χρονική διαδρομή της μεταβλητής ρύπανσης $s(t)$, εξαρτάται από τις πρωθύστερές της τιμές καθώς επίσης και από την απόφαση, $x(t)$, πού η ίδια έχει λάβει. Συμβολίζουμε τον περιορισμό αυτό σαν την χρονική παράγωγο της $s(t)$, δηλαδή: $\dot{s}(t)=f(s(t),x(t),t)$

Η απόφαση πού έχει ληφθεί στον χρόνο t έχει δύο επιπτώσεις:

- Επιδρά στις ροές κερδών στον χρόνο t
- Επιδρά στη τιμή της μεταβλητής ρύπανσης s, η οποία με τη σειρά της επιδρά στη μελλοντική ωφέλεια.

Η διαίσθηση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου είναι η ακόλουθη: Επιλέγουμε τη χρονική διαδρομή, $\bar{x}(t)$, πού μεγιστοποιεί τα συνολικά κέρδη $W(s(t),\bar{x},t)$, με περιορισμό την εξίσωση κίνησης της μεταβλητής ρύπανσης $s(t)$.

Είναι ένα ιδιαίτερο πρόβλημα καθώς οι βασικές τεχνικές του Διαφορικού Λογισμού είναι ικανές να λύσουν το πρόβλημα του πως θα επιλεγεί η βέλτιστη τιμή μιας μεταβλητής και όχι μιας βέλτιστης χρονικής διαδρομής. Η στρατηγική επίλυσης του προβλήματος είναι να μετασχηματισθεί το πρόβλημα σε τέτοιο πού το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένας απλός αριθμός και όχι πολλοί αριθμοί (πού θα είναι οι συνιστώσες της χρονικής διαδρομής). Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να επιτευχθεί ο μετασχηματισμός αυτός και ο πιο γενικευμένος και απλός τρόπος είναι η θεωρία του βέλτιστου ελέγχου.

<u>Το Πρόβλημα της Ρύπανσης της Επιχείρησης</u>

Δοθέντων των συνολικών κερδών $W(s(t),\vec{x},t)=\int_t^T u(s(t),x(t),t)\,dt$

Διαχωρίζουμε τα συνολικά κέρδη (ωφέλεια) σε δύο χρονικά μέρη

- Ένα μικρό χρονικό διάστημα, μήκους Δ, εκκινώντας από τη χρονική περίοδο t
- Το υπόλοιπο χρονικό διάστημα από $t+\Delta$ έως T

Υποθέτουμε ότι το χρονικό διάστημα Δ είναι τόσο μικρό πού η επιχείρηση δεν μεταβάλλει την απόφασή της $x(t)$. Στη συνέχεια, κατά τη συνήθη τακτική του διαφορικού λογισμού, επιτρέπουμε τη χρονική ποσότητα Δ να μικρύνει ως το μηδέν δηλ. υποθέτουμε ότι $\Delta \to 0$. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε:

$$W\left(s(t),\vec{x},t\right) = u\left(s,x(t),t\right) + \int_{t+\Delta}^{T} u\left(s(t),x(t),t\right) dt$$

Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της ισότητας είναι η συνεισφορά στην ωφέλεια W εντός του χρονικού διαστήματος Δ κατά το οποίο η απόφαση $x(t)$ παρέμεινε σταθερή.

Το κάτω όριο του ολοκληρώματος, $t+\Delta$, είναι πλέον η χρονική στιγμή εκκίνησης του αποθέματος ρύπανσης $s(t+\Delta)$, το οποίο δεν έχει καμία μεταβολή από το αρχικό απόθεμα $s(t)$, καθόσον δεν έχει επηρεασθεί από την απόφαση $x(t)$.

Εφόσον το ολοκλήρωμα $\int_{t+\Delta}^{T} \cdot\, dt$ έχει ακριβώς την ίδια μορφή με το ολοκλήρωμα $\int_{t}^{T} \cdot\, dt$, με μόνη διαφορά το κάτω όριο ολοκλήρωσης, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τον ορισμό των συνολικών κερδών W ως εξής:

$$W\left(s(t),\vec{x},t\right) = u\left(s,x(t),t\right)\Delta + W\left(s(t+\Delta),\vec{x},t+\Delta\right)$$

Έστω τώρα ότι $\bar{x}^*$ συμβολίζει τη χρονική διαδρομή του x πού μεγιστοποιεί τα συνολικά κέρδη W και με V^* συμβολίζουμε το μέγιστο αυτό, δηλαδή

$$V^*\left(s(t),t\right) = \max_{\vec{x}} W\left(s(t),\vec{x},t\right)$$

Θεωρούμε τώρα την εξής ιδιαίτερη πολιτική. Επί του διαστήματος Δ, επιλέγουμε ένα αυθαίρετο $x(t)$, το οποίο όμως επί του $t+\Delta$ είναι μια βέλτιστη διαδρομή $\bar{x}^*$. Η αμοιβή για την πολιτική αυτή είναι:

$$V\left(s(t),x(t),t\right) = u\left(s(t),x(t),t\right)\Delta + V^*\left(s(t+\Delta),t+\Delta\right)$$

όπου ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της ισότητας εκφράζει το όφελος πού προέρχεται από την απόφαση $x(t)$ εντός του χρονικού διαστήματος Δ, ενώ ο δεύτερος όρος του ιδίου μέλους της ισότητας εκφράζει τα μέγιστα οφέλη πού αποκτώνται επί του διαστήματος $[t+\Delta,T]$, δοθέντος ότι η μεταβλητή $s(t+\Delta)$ προσδιορίζεται από τις μεταβλητές $s(t)$ και $x(t)$. Να σημειωθεί ότι η μεταβλητή απόφασης, $x(t)$, δεν υπάρχει πλέον σαν

παράμετρος γιατί ήδη έχει υποτεθεί βελτιστότητα, κατά τον ορισμό της V^*.
Το πρόβλημα πλέον έχει μετασχηματισθεί σε ένα κανονικό πρόβλημα διαφορικού λογισμού, ως εξής: «*Να βρεθεί η τιμή της μεταβλητής απόφασης, $x(t)$, πού μεγιστοποιεί την ποσότητα $V(s(t),x(t),t)$*».
Λαμβάνοντας παραγώγους ως προς $x(t)$ και εξισώνοντας αυτές με το μηδέν έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial x(t)} = \Delta \frac{\partial u}{\partial x(t)} + \frac{\partial V^*}{\partial s(t+\Delta)} \frac{\partial s(t+\Delta)}{\partial x(t)} = 0 \qquad (18)$$

Επειδή το χρονικό διάστημα Δ υποτέθηκε πολύ μικρό έχουμε:

$$\begin{aligned} s(t+\Delta) &\approx s(t) + \Delta \dot{s}(t) \\ &= s(t) + \Delta f(s(t),x(t),t) \end{aligned}$$

συνεπώς: $\dfrac{\partial s(t+\Delta)}{\partial x(t)} = \Delta \dfrac{\partial f(s(t),x(t),t)}{\partial x(t)}$

Επίσης η ποσότητα $\dfrac{\partial V^*(s(t+\Delta),t+\Delta)}{\partial s(t+\Delta)}$ είναι μια αύξηση στην ποσότητα V^*, ως αποτέλεσμα μιας οριακής αύξησης στη μεταβλητή ρύπανσης $s(t+\Delta)$, είναι φανερά η οριακή τιμή της ρύπανσης.
Συμβολίζουμε με $\lambda(t+\Delta)$ την οριακή αυτή τιμή της ρύπανσης. Η (18) γίνεται: $\Delta \dfrac{\partial u}{\partial x(t)} + \lambda(t+\Delta)\Delta \dfrac{\partial f}{\partial x(t)} = 0$

Απαλείφοντας το χρονικό διάστημα Δ η τελευταία παίρνει τη μορφή
$\dfrac{\partial u}{\partial x(t)} + \lambda(t+\Delta)\dfrac{\partial f}{\partial x(t)} = 0$

και εφόσον $\Delta \to 0$ έχουμε:

$$\frac{\partial u(s(t),x(t),t)}{\partial x(t)} + \lambda(t)\frac{\partial f(s(t),x(t),t)}{\partial x(t)} = 0 \qquad (19)$$

Η (19) είναι η πρώτη από τις τρεις αναγκαίες συνθήκες πού χρειάζονται για να λυθεί ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου.
Η ερμηνεία της εξίσωσης (19) είναι η ακόλουθη:
Καθ' όλη τη βέλτιστη διαδρομή, η οριακή βραχυχρόνια επίδραση μιας μεταβολής στη μεταβλητή απόφασης, δηλ. μια $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, πρέπει να εξισορροπεί την επίδραση της συνολικής τιμής της ωφέλειας την επόμενη χρονική στιγμή. Ο όρος $\lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}$ είναι η επίδραση στο απόθεμα ρύπανσης μιας μεταβολής στη μεταβλητή απόφασης x, πολλαπλασιασμένη επί την οριακή τιμή του αποθέματος ρύπανσης.
Κατά μια άλλη εκδοχή η μεταβλητή απόφασης, $x(t)$, έχει επιλεγεί έτσι ώστε το οριακό έμμεσο όφελος να ισούται με το οριακό μακροχρόνιο κόστος.

Η εξίσωση (19) αποτελεί τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται από την μεταβλητή επιλογής $x(t)$. Η τελευταία όμως περιλαμβάνει τη μεταβλητή $\lambda(t)$, πού εκφράζει την οριακή τιμή της ρύπανσης, τιμή η οποία είναι άγνωστη. Το επόμενο βήμα είναι να χαρακτηρίσουμε τη μεταβλητή $\lambda(t)$. Για το σκοπό αυτό υποθέτουμε ότι η μεταβλητή απόφασης $x(t)$ έχει επιλεγεί έτσι ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση (19), τότε:

$$V^*(s(t),t)=u(s(t),x(t),t)\Delta+V^*(s(t+\Delta),t+\Delta)$$

Ανακαλούμε ότι η $\lambda(t)$ εκφράζει τη μεταβολή στην αξία της επιχείρησης, δοθείσης της απειροελάχιστης μεταβολής του αποθέματος ρύπανσης. Για να βρεθεί μια έκφραση αυτής, διαφορίζουμε τη συνάρτηση αξίας ως προς τη μεταβλητή ρύπανσης $s(t)$, συνεπώς:

$$\frac{\partial V^*(s(t),t)}{\partial s(t)}=\lambda(t)=\Delta\frac{\partial u}{\partial s(t)}+\lambda(t+\Delta)\frac{\partial s(t+\Delta)}{\partial s(t)}$$

$$=\Delta\frac{\partial u}{\partial s(t)}+\left(\frac{\partial\left[s(t)+\dot{s}(t)\Delta\right]}{\partial s(t)}\right)\left(\lambda(t)+\dot{\lambda}(t)\Delta\right)$$

$$=\Delta\frac{\partial u}{\partial s(t)}+\left(1+\Delta\frac{\partial f}{\partial s(t)}\right)\left(\lambda(t)+\dot{\lambda}(t)\Delta\right)$$

καθόσον έχει υποτεθεί ότι $\Delta\approx 0$ και εφόσον $\frac{d\lambda(t)}{dt}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\lambda(t+\Delta)-\lambda(t)}{\Delta}$,

συνεπώς $\lambda(t+\Delta)\approx\lambda(t)+\dot{\lambda}(t)\Delta$

Στη συνέχεια

$$0=\Delta\frac{\partial u}{\partial s(t)}+\dot{\lambda}(t)\Delta+\lambda(t)\Delta\frac{\partial f}{\partial s(t)}+\dot{\lambda}(t)\frac{\partial f}{\partial s(t)}\Delta^2$$

Διαιρώντας δια Δ και θέτοντας $\Delta\to 0$ ο τελευταίος όρος του β΄ μέλους εξαφανίζεται και μπορούμε να γράψουμε:

$$-\dot{\lambda}(t)=\frac{\partial u(s(t),x(t),t)}{\partial s(t)}+\lambda(t)\frac{\partial f(s(t),x(t),t)}{\partial s(t)} \qquad (20)$$

Η (20) είναι η δεύτερη αναγκαία συνθήκη που απαιτείται για να λυθεί ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου. Ο όρος $\dot{\lambda}(t)$ εκφράζει την υπερτίμηση της οριακής αξίας της ρύπανσης, συνεπώς $-\dot{\lambda}(t)$ είναι η αντίστοιχη υποτίμηση.

Η συνθήκη (20) δηλώνει ότι η υποτίμηση της ρύπανσης ισούται με το άθροισμα των αφενός της εισφοράς της στα κέρδη στο ενδιάμεσο διάστημα dt και αφετέρου της εισφοράς της στην αύξηση της αξίας του αποθέματος ρύπανσης στο τέλος της χρονικής περιόδου dt.

Προς το παρόν έχουμε διασφαλίσει μια έκφραση που προσδιορίζει την τιμή της μεταβλητής απόφασης, $x(t)$, και μια έκφραση που προσδιορίζει την οριακή τιμή της ρύπανσης, $\lambda(t)$. Και οι δύο όμως εκφράσεις εξαρτώνται από το απόθεμα ρύπανσης, $s(t)$, συνεπώς χρειάζεται μια έκφραση πού να χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά της μεταβλητής ρύπανσης, $s(t)$. Αυτή αποκτάται εύκολα, καθόσον έχουμε ήδη τον περιορισμό:

$$\dot{s}(t)=f\left(s(t),x(t),t\right) \qquad (21)$$

και η (21) είναι η τρίτη και τελευταία αναγκαία συνθήκη.

Ικανές συνθήκες της αρχής του μέγιστου

Η αρχή του μέγιστου παρέχει τις αναγκαίες συνθήκες (4), που γενικά δεν είναι και ικανές συνθήκες. Όπως ακριβώς και στη στατική βελτιστοποίηση, επιβάλλοντας κάποιες επιπρόσθετες υποθέσεις κοιλότητας και διαφορισιμότητας στην αντικειμενική συνάρτηση και στη συνάρτηση πού εκφράζει την κίνηση της μεταβλητής κατάστασης τότε μπορούν οι (4) να εκπληρώσουν το κριτήριο των ικανών συνθηκών. Για το λόγο αυτό θεωρούμε το βασικό πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου επιβάλλοντας τη συνθήκη οι συναρτήσεις F, f να είναι και οι δύο διαφορίσιμες και κοίλες ταυτόχρονα ως προς τις μεταβλητές x,u και επιπλέον $\lambda \geq 0$, τότε έχουμε

$$\max_{u} \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,u)\,dt$$

με περιορισμό $\dot{x}=f(t,x,u)$, $\quad x(t_0)=x_0$

Προκειμένου να δείξουμε ότι οι (4) είναι και ικανές, θεωρούμε ότι οι μεταβλητές $x^*(t),u^*(t),\lambda(t)$ ικανοποιούν τις (4). Έστω ακόμα ότι οι συναρτήσεις F^*, f^* είναι αυτές πού λαμβάνουν τιμές καθ' όλο το μήκος των χρονικών διαδρομών των $x^*(t),u^*(t),\lambda(t)$. Θα πρέπει να δειχτεί ότι για οποιαδήποτε άλλη αυθαίρετη επιτρεπτή συνάρτηση (κοίλη και διαφορίσιμη) $F \neq F^*$ ισχύει ότι:

$$W=\int_{t_0}^{t_1} \left(F^*-F\right) \geq 0 \qquad (26)$$

Εφόσον η F υποτέθηκε κοίλη έχουμε

$$F^*-F \geq \left(x^*-x\right)F_x^*+\left(u^*-u\right)F_u^* \qquad (27)$$

Ολοκληρώνοντας την (27) $W \geq \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(x^*-x\right)F_x^*+\left(u^*-u\right)F_u^*\right]dt \qquad (28)$

Κάνοντας χρήση των (4) $\dfrac{\partial F\left(u(t),x(t),t\right)}{\partial x(t)}+\lambda(t)\dfrac{\partial f\left(u(t),x(t),t\right)}{\partial x(t)}=0$ και

$-\dot{\lambda}(t)=\dfrac{\partial F\left(u(t),x(t),t\right)}{\partial u(t)}+\lambda(t)\dfrac{\partial f\left(s(t),x(t),t\right)}{\partial u(t)}$, χωρίς απώλεια της γενικότητας η (28), γράφεται ως:

$$\Omega \geq \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left(x^* - x\right)\left(-\lambda f_x^* - \dot{\lambda}\right) + \left(u^* - u\right)\left(-\lambda f_u^*\right) \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \lambda \left\{ \left(x^* - x\right) f_x^* - \left(x^* - x\right)\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right) - \left(u^* - u\right) f_u^* \right\} dt \qquad (29)$$

ολοκληρώνοντας κατά μέλη τον όρο $\int_{t_0}^{t_1} -\left(x^* - x\right)\dot{\lambda}\, dt$, έχουμε

$$-\lambda\left(x^* - x\right)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \lambda\left(\dot{x}^* - \dot{x}\right) dt .$$

Εφόσον $\lambda(t_1) = 0$ και $x^*(t_0) = x(t_0) = x_0$ ο πρώτος όρος μηδενίζεται. Η εξίσωση κίνησης της μεταβλητής κατάστασης $\dot{x} = f$ δίνει αποτέλεσμα:

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda\left(\dot{x}^* - \dot{x}\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \lambda\left(f^* - f\right) dt$$

Η (29) τότε: $\Omega \geq \int_{t_0}^{t_1} \lambda \left\{ f^* - f - \left(x^* - x\right) f_x^* - \left(u^* - u\right) f_u^* \right\} dt$ (30)

Εφόσον η f είναι κοίλη έχουμε $f^* - f > \left(x^* - x\right) f_x^* + \left(u^* - u\right) f_u^*$ (31)

Η (30) λόγω της (31) και του γεγονότος ότι $\lambda \geq 0$ δίνει το επιθυμητό αποτέλεσμα $\Omega \geq 0$.

Πολλαπλές μεταβλητές ελέγχου και κατάστασης

Σε οικονομικές εφαρμογές του βέλτιστου ελέγχου αρκετές φορές οι μεταβλητές ελέγχου και κατάστασης είναι περισσότερες της μιας. Η διαδικασία της επίλυσης ενός τέτοιου προβλήματος δεν διαφέρει από αυτή με μία μεταβλητή. Απλώς οι αναγκαίες συνθήκες της αρχής του μέγιστου για μια μεταβλητή αντικαθίστανται με ένα διάνυσμα μεταβλητών. Ακόμα σε τέτοιου είδους προβλήματα η αρχή του μέγιστου είναι αρκετά χρήσιμη για εξαγωγή συμπερασμάτων όσον αφορά την διασύνδεση των μεταβλητών αυτών. Επιδείχνουμε τα προηγούμενα με ένα υπόδειγμα με δύο μεταβλητές κατάστασης και δύο μεταβλητές ελέγχου.

Ένα υπόδειγμα βέλτιστης κατανάλωσης

Θεωρούμε ότι σε μια οικονομία υπάρχει μια αντιπροσωπευτική επιχείρηση πού χρησιμοποιεί στην παραγωγική διαδικασία τις εισροές κεφάλαιο $K(t)$ και ένα εξαντλούμενο πόρο $R(t)$ πού εξάγεται. Το προϊόν $Q(t)$ παράγεται σύμφωνα με την συνάρτηση παραγωγής $Q(t) = AK(t)^{1-a} R(t)^a$ με $0 < a < 1$. Η συνάρτηση χρησιμότητας από την κατανάλωση του προϊόντος υποτίθεται λογαριθμική $U(t) = \ln C(t)$. Το παραγόμενο προϊόν πού δεν καταναλώνεται μετατρέπεται σε κεφάλαιο, το κεφάλαιο δεν υποτιμάται και το απόθεμα του εξαγόμενου πόρου στο χρόνο 0 είναι X_0. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών κατάστασης και ελέγχου, πού προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος μεγιστοποίησης της χρησιμότητας.

Οι μεταβλητές κατάστασης είναι το κεφάλαιο $K(t)$ και το υπολειπόμενο απόθεμα του εξαντλούμενου πόρου $X(t)$, ενώ οι μεταβλητές ελέγχου είναι ο εξαγόμενος πόρος $R(t)$ και η κατανάλωση $C(t)$. Σαν επιτυχία της επιχείρησης θεωρείται η μεγιστοποίηση χρησιμότητας με περιορισμούς τον ρυθμό εξάντλησης του αποθέματος του εξαντλούμενου πόρου και τη συσσώρευση του κεφαλαίου.

Συνεπώς το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου γράφεται ως εξής:

$$\max_{C,R} \int_0^T \ln C(t)\,dt$$

με περιορισμούς $\dot{X}(t) = -R(t)$ (32) $X(0) = X_0$ $X(T) = 0$

$\dot{K}(t) = AK(t)^{(1-\alpha)} R(t)^{\alpha} - C(t)$ (33) $K(0) = K_0$ $K(T) = 0$

Η Hamiltonian είναι:

$$H(t) = \ln C(t) - \lambda(t) R(t) + \mu(t)\left[AK(t)^{1-\alpha} R(t)^{\alpha} - C(t)\right] \qquad (34)$$

και οι αναγκαίες συνθήκες Α΄ τάξης

$$\frac{\partial H}{\partial C(t)} = 0 \text{ ή } \frac{1}{C(t)} = \mu(t) \qquad (35)$$

$$\frac{\partial H}{\partial R(t)} = 0 \text{ ή } -\lambda(t) + \alpha\mu(t)AK(t)^{(1-\alpha)} R(t)^{(\alpha-1)} = 0 \qquad (36)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial X(t)} = 0 \qquad (37)$$

$$\dot{\mu}(t) = -\frac{\partial H}{\partial K(t)} = -(1-\alpha)\mu(t)AK^{(-\alpha)}R(t)^{\alpha} \qquad (38)$$

μαζί με τους περιορισμούς (32), (33).

Από την (37) προκύπτει ότι η βοηθητική μεταβλητή $\lambda(t)$ είναι σταθερά.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $\xi(t) = \dfrac{R(t)}{K(t)}$, τότε η συνθήκη (36) μετασχηματίζεται ως: $-\lambda(t) + \alpha\mu(t)Ax(t)^{(\alpha-1)} = 0$ (39)

Παραγωγίζουμε την (39) ως προς το χρόνο και κάνοντας χρήση της (37) έχουμε:

$$\frac{\alpha\mu(t)Ax^{(\alpha-1)}(t)(\alpha-1)\dot{x}(t)}{x(t)} + \alpha\dot{\mu}(t)Ax^{(\alpha-1)}(t) = 0 \text{ ή}$$

$$\text{ή } \dot{\mu}(t)x^{(\alpha-1)}(t) = \frac{(1-\alpha)\mu(t)x^{(\alpha-1)}(t)\dot{x}(t)}{x(t)} \text{ ή}$$

$$\text{ή } \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = (1-\alpha)\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \qquad (40)$$

Αντικαθιστώντας την (38) στην (40) προκύπτει ότι

$$-\frac{(1-a)m(t)A}{m(t)x^{-a}(t)} = (1-a)\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} \text{ ή } -x^{-(a+1)}(t)\dot{x}(t) = A \qquad (41)$$

Η λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (41) είναι η εξής:

$$x(t) = -(aAt + aAC)^{\left(\frac{1}{a}\right)} \text{ ή } \frac{x^{(-a)}(t)}{a} + C_1 = At \qquad (42)$$

Όπου C_1 η σταθερά ολοκλήρωσης. Θέτοντας $\Xi = \frac{aC_1}{A}$ η (42) γράφεται τελικά ως

$$Ax^{a}(t) = \frac{1}{\mathrm{X} + at} \qquad (43)$$

Η παρακάτω πρόταση προκύπτει από την (43)

Πρόταση 1:

Στο υπόδειγμα μεγιστοποίησης χρησιμότητας μιας επιχείρησης πού χρησιμοποιεί ως εισροές το κεφάλαιο και ένα εξαντλούμενο πόρο που εξάγεται, η σχέση των εισροών κεφάλαιο προς εξαγόμενο πόρο φθίνει χρονικά.

Εξετάζουμε τώρα τη σχέση της εισροής κεφάλαιο προς το παραγόμενο προϊόν. Φανερά

$$\frac{K(t)}{Q(t)} = \frac{K(t)}{AK^{1-a}(t)R^{a}(t)} = \frac{1}{A}\left(\frac{K(t)}{R(t)}\right)^{a} = \frac{1}{Ax^{a}} = \mathrm{X} + at \qquad (44)$$

Και το παρακάτω πόρισμα προκύπτει από την (44)

Πόρισμα 1:

Στο ίδιο υπόδειγμα η σχέση εισροής κεφαλαίου προς παραγόμενο προϊόν μεγενθύνεται γραμμικά με ρυθμό a.

Συμπεράσματα

Υπάρχει μια ταχύτατα διογκούμενη αρθρογραφία στην οικονομική θεωρία κατά τις τελευταίες δεκαετίες πού αφορά τα δυναμικά οικονομικά υποδείγματα. Σαν δυναμικά οικονομικά υποδείγματα ορίζονται εκείνα πού ο χρόνος εισάγεται σαν μια μεταβλητή του υποδείγματος. Επομένως σαν επίλυση οποιουδήποτε δυναμικού οικονομικού υποδείγματος θα είναι η χρονική διαδρομή (τροχιά) των συσχετιζόμενων μεταβλητών αυτού. Οι μεθοδολογίες πού έχουν αναπτυχθεί σαν αποδεκτές για την επίλυση ενός οικονομικού υποδείγματος είναι κυρίως ο λογισμός μεταβολών, ο βέλτιστος έλεγχος και ο δυναμικός προγραμματισμός. Στο παρόν άρθρο θέτουμε το φορμαλιστικό πλαίσιο της μεθοδολογίας του βέλτιστου ελέγχου και παραθέτουμε τις ικανές συνθήκες πού διέπουν ένα οιοδήποτε οικονομικό υπόδειγμα πού τίθεται ως πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου. Στη συνέχεια εκφράζουμε την οικονομική ερμηνεία πού μπορεί να έχει η αρχή του μέγιστου σε ένα υπόδειγμα μιας παραγωγικής επιχείρησης πού λόγω ακριβώς της παραγωγικής διαδικασίας αποθέτει μια ροή ρύπων στο περιβάλλον. Η ερμηνεία πού δίνεται αφορά την ποιοτική εξέταση των μεταβλητών πού εμπλέκονται στην αρχή του μέγιστου. Τέλος αναπτύσσουμε ένα υπόδειγμα βέλτιστης κατανάλωσης με δύο εμπλεκόμενες μεταβλητές κατάστασης και δύο μεταβλητές ελέγχου, ενώ τα συνήθη υποδείγματα πού εμφανίζονται στην οικονομική αρθρογραφία εμπλέκουν μόνο μια μεταβλητή κατάστασης και μια μεταβλητή ελέγχου. Οι εισροές του προτεινόμενου υποδείγματος είναι η συνήθης εισροή «κεφάλαιο» και μια δεύτερη πού αφορά ένα εξαντλούμενο πόρο πού εξάγεται, για παράδειγμα πετρέλαιο. Από την επίλυση του υποδείγματος με τη μέθοδο του βέλτιστου ελέγχου προκύπτουν κάποια ουσιώδη συμπεράσματα όσον αφορά την μεταχείρηση των εισροών. Το πρώτο συμπέρασμα πού προκύπτει από την επίλυση του υποδείγματος είναι ότι η σχέση των δύο εισροών κεφάλαιο προς εξαγόμενο πόρο φθίνει χρονικά, ενώ το δεύτερο συμπέρασμα πού προκύπτει είναι ότι η σχέση εισροής προς το παραγόμενο προϊόν μεγενθύνεται γραμμικά με σταθερό ρυθμό.

Βιβλιογραφία

Basar T., Olsder G., 1998, “Dynamic Noncooperative Game Theory”, SIAM edition New York, Academic Press.

Chiang, A.C., 1982, Elements of dynamic optimization. McGraw Hill, Inc.

Halkos, G. E., 2007, “Environmental thinking in Economics”, Archives of Economic History XIX (2) 5 – 17.

Halkos, G.E. and G.J. Papageorgiou, 2008, “A Stackelberg Model on Taxing Polluting firms”. Discussion Paper, University of Thessaly, Department of Economics.

Halkos, G.E. and G.J. Papageorgiou, 2009, “A differential game approach in the case of a polluting oligopoly”. Discussion Paper, University of Thessaly, Department of Economics.

Halkos, G.E. and G.J. Papageorgiou, 2009, “Extraction of nonrenewable resources. A differential game approach”. Archives of Economic History, forthcoming.

Hotelling, H., 1931, “The economics of exhaustible resources”, Journal of Political Economy 39, 137 – 175.

Karp, L., 1984, “Optimality and consistency in a differential game with non – renewable resources”. Journal of Economic Dynamics and Control, 8, 73 – 97.

Lewins, Tracy R., Mathews S. Burness, S., 1979, “Monopoly and the rate of extraction of exhaustible resources”, American Economic Review, 69, 227 – 230.

Ramsey, F., 1928, “A mathematical theory of saving”. *Economic Journal* 38, 543-559

Varian, R. H., 1992, Microeconomic Analysis Third Edition W – W. Norton New York.