Προσέγγιση του προβλήματος της χωροθέτησης και κατανομής επιχειρηματικών μονάδων

Περικλής Φυλάκης
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πολυτεχνική σχολή
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
pfylakis@civil.auth.gr

Περίληψη
Το πρόβλημα χωροθέτησης και κατανομής επιχειρηματικών μονάδων ιδίως στο χώρο της μαζικής παραγωγής προϊόντων, όπου η μείωση του κόστους των προϊόντων επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τη διείσδυση τους στην αγορά, αποτελεί ένα σημαντικό μέρος του στρατηγικού προγραμματισμού στον χώρο των επιχειρήσεων αυτού του τομέα. Η χωροθέτηση των επιχειρηματικών μονάδων και η κατανομή της ζήτησης σε αυτές είναι μάλλον περίπλοκη. Η ύπαρξη ενός υποστηρικτικού εργαλείου στη λήψη των αποφάσεων για το προαναφερθέν πρόβλημα αποτελεί το ζητούμενο για τα στελέχη - των επιχειρήσεων που δραστηριοποιούνται σε αυτό το χώρο. Η χρήση λογισμικού διαφόρων προτύπων που έχουν εμφανιστεί στα τελευταία έτη, σε μία προσπάθεια να βρεθεί μια λύση στο πρόβλημα, εισάγει περιορισμούς και παράγοντες που απομακρύνουν το πρόβλημα από τις φυσικές και πραγματικές του διαστάσεις. Η παροχή επί πλέον εκπτώσεων που εξαρτάται από τον όγκο της συνολικής παραγωγής είναι συνηθισμένη πρακτική. Στην παρούσα εργασία κατεβλήθη προσπάθεια για την βέλτιστη επίλυση του προβλήματος κάνοντας χρήση αυτής της δυνατότητας. Έμφαση επίσης δόθηκε στη βέλτιστη εκμετάλλευση και κατανομή των πόρων των πρώτων υλών.

Λέξεις - Κλειδιά: χωροθέτηση, κατανομή επιχειρηματικών μονάδων, εκπτωτική πολιτική

JEL Classification Codes: R53

Εισαγωγή

Στα πλαίσια του στρατηγικού προγραμματισμού των παραγωγικών επιχειρήσεων, ένας από τους κυριότερους στόχους αποτελεί η εύρεση της καταλληλότερης θέσης για την εγκατάσταση των παραγωγικών της μονάδων. Η μονάδα πρέπει να εγκατασταθεί εκεί όπου θα είναι σε θέση να ικανοποιήσει πλήρως τη ζήτηση των καταναλωτικών κέντρων επιτυγχάνοντας το χαμηλότερο δυνατό κόστος αποσπώντας ταυτόχρονα το μεγαλύτερο κομμάτι αυτής από άλλες ανταγωνιστικές μονάδες. Το πρόβλημα γίνεται ακόμα πιο σύνθετο όταν για την παραγωγή του προϊόντος απαιτούνται διάφορες πρώτες ύλες οι ποσότητες των οποίων δεν είναι απεριόριστες η δε προμήθεια τους να επιτυγχάνεται με το χαμηλότερο δυνατό κόστος. Στο σχηματισμό του κόστους του τελικού προϊόντος συμμετέχουν η μεταφορά τόσο των πρώτων υλών όσο και των τελικών προϊόντων, το κόστος εγκατάστασης και λειτουργίας των βιομηχανικών μονάδων. Η τακτική της χρήσης επί πλέον εκπτώσεων στις περιπτώσεις υψηλούς παραγωγής - κατανάλωσης θεωρείται μάλλον επιβεβλημένη στο χώρο. Ο λόγος για τον οποίο αυτό συμβαίνει είναι μάλλον απλός και προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε μονάδα έχει τη δυνατότητα χαμηλότερου κόστους παραγωγής όταν η παραγωγή της υπερβεί κάποια όρια. Ο στόχος των επιχειρήσεων που θα εγκαταστήσουν αυτές τις βιομηχανικές μονάδες είναι να μπορούν να ικανοποιήσουν πλήρως τη ζήτηση εγκαθιστώντας όσο το δυνατόν λιγότερες μονάδες με το μικρότερο μέγεθος και κόστος αποσπώντας ταυτόχρονα το μεγαλύτερο δυνατό ποσοστό από την υπάρχουσα ζήτηση.

Στα τελευταία χρόνια, διάφορα πρότυπα έχουν εμφανιστεί για τη λύση αυτού του είδους των προβλημάτων. Σε αυτή την εργασία, σε ένα δίκτυο επιχειρείται με την ανάπτυξη ενός αλγόριθμου να βρεθεί η βέλτιστη λύση χωρίς τις απλοποιήσεις και τους περιορισμούς που απομακρύνουν το πρόβλημα από τις πραγματικές φυσικές του διαστάσεις. Αυτός ο αλγόριθμος βρίσκει τη βέλτιστη λύση για το πρόβλημα, εισάγοντας τον παράγοντα της εκπτωτικής πολιτικής για τον καθορισμό της παραγωγικής δυνατότητας.

Το πρόβλημα χωροθέτησης-κατανομής (location allocation problem) Υφιστάμενη κατάσταση

Ενός επιπέδου

Μία επιχειρηματική μονάδα θεωρείται περιορισμένης δυναμικότητας (capacitated) εάν μπορεί να εξυπηρετήσει ένα περιορισμένο αριθμό από πελάτες ή μπορεί να ανταποκριθεί σε συγκεκριμένη ζήτηση.

Στην περίπτωση που μπορεί να εξυπηρετήσει απεριόριστο αριθμό πελατών ή μπορεί να ανταποκριθεί σε απεριόριστη ζήτηση τότε θεωρείται μη -περιορισμένης δυναμικότητας (uncapacitated).

Εάν οι βιομηχανικές μονάδες είναι μη περιορισμένης δυναμικότητας (uncapacitated) και τα κόστη εξυπηρέτησης, τα κόστη δηλαδή για την παροχή υπηρεσιών προς τους πελάτες από τις βιομηχανικές μονάδες είναι ευθέως ανάλογα των αποστάσεων που υπάρχουν μεταξύ τους, τότε πρόκειται για ένα από τα πιο γνωστά διακριτά μοντέλα χωροθέτησης. Το συγκεκριμένο πρόβλημα ονομάζεται στη διεθνή βιβλιογραφία και πρόβλημα χωροθέτησης-κατανομής (location allocation problem) ή και πρόβλημα χωροθέτησης απλής βιομηχανίας (simple plant location problem). Οι πρώτοι που πέτυχαν την ικανοποιητική μοντελοποίησή αυτού του προβλήματος είναι οι Balinski και Wolfe [1], Manne [15], Kuehn και Hamburger [13] και ο Stollsteimer [17].
Η διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής: ζητείται η χωροθέτηση ενός αριθμού βιομηχανικών μονάδων, σε ένα διακριτό σύνολο πιθανών τοποθεσιών, που θα ικανοποιούν ένα επίσης διακριτό σύνολο καταναλωτικών κέντρων με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους λαμβάνοντας υπόψη το σταθερό κόστος που απαιτείται για την εγκατάσταση μιας μονάδας.

Η μοντελοποίηση του προβλήματος γίνεται ως εξής:
$I = \{1,\ldots,m\}$ είναι το σύνολο των πελατών
$J = \{1,\ldots,p\}$ το σύνολο των περιοχών όπου υπάρχει η δυνατότητα να εγκατασταθούν βιομηχανικές μονάδες
f_j = το σταθερό κόστος για την εγκατάσταση της μονάδας j. Τα σταθερά κόστη θεωρούνται μη αρνητικά
c_{ij} = το κέρδος που σχετίζεται με την κάλυψη της ζήτησης του πελάτη i από τη μονάδα j. Συνήθως το c_{ij} είναι συνάρτηση του κόστους παραγωγής στη μονάδα j, της ζήτησης και της τιμής πώλησης στον πελάτη i και του κόστους μεταφοράς ανάμεσα στον πελάτη i και τη μονάδα j.

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{εάν έχει εγκατασταθεί η επιχειρηματική μονάδα j στον κόμβο j} \\ & \end{cases}$$

0 εάν δεν έχει εγκατασταθεί

x_{ij} = το μέρος της ζήτησης του πελάτη i που εξυπηρετείται από τη μονάδα j

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$\max \quad \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} c_{ij} x_{ij} - \sum_{j\in J} f_j y_j \qquad (1.1)$$

Με περιορισμούς:

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \qquad (1.2)$$

$$x_{ij} \le y_j \qquad \forall i,j \qquad (1.3)$$

$$y_j = 0,1 \qquad \forall j \qquad (1.4)$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad \forall i,j \qquad (1.5)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση (1.1) αναφέρεται στη μεγιστοποίηση του κέρδους των βιομηχανικών μονάδων.

Ενώ στους περιορισμούς η σχέση (1.2) υποδεικνύει την αναγκαιότητα της κάλυψης της ζήτησης του κάθε πελάτη. Η σχέση (1.3) εγγυάται ότι δεν υπάρχουν πελάτες οι οποίοι δεν εξυπηρετούνται από βιομηχανικές μονάδες, η σχέση (1.4) δείχνει τις τιμές της μεταβλητής απόφασης που είναι 0 ή 1 και η σχέση (1.5) βεβαιώνει ότι η μεταφερόμενη ποσότητα από την επιχειρηματική μονάδα j προς το καταναλωτικό κέντρο i είναι μη αρνητικός αριθμός.

Παραλλαγή της παραπάνω περίπτωσης αποτελεί το πρόβλημα με τους ίδιους περιορισμούς(1.2), (1.3), (1.4) και (1.5) αλλά με αντικειμενική συνάρτηση:

$$\min \quad \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} d_{ij} x_{ij} + \sum_{j\in J} f_j y_j \qquad (1.6)$$

Όπου: d_{ij} = το κόστος της μονάδας του προϊόντος εξαιτίας της απόστασης μεταξύ επιχειρηματικής μονάδας και καταναλωτικού κέντρου

Οπότε η (1.6) αναφέρεται στην ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς των προϊόντων από τις βιομηχανικές μονάδες στα κέντρα κατανάλωσης λαμβάνοντας υπόψη το σταθερό κόστος που απαιτείται για την εγκατάσταση μιας μονάδας.

Πολλών επιπέδων

Στην προηγούμενη ενότητα περιγράφηκε η χωροθέτηση μη περιορισμένης δυναμικότητας βιομηχανικών μονάδων των οποίων τα κόστη για την παροχή υπηρεσιών προς τους πελάτες από τις βιομηχανικές μονάδες είναι ευθέως ανάλογα των αποστάσεων που υπάρχουν μεταξύ τους και οι προς χωροθέτηση βιομηχανικές μονάδες είναι όλες ενός επιπέδου, δηλαδή του ίδιου τύπου. Συνηθέστερο πρόβλημα όμως αποτελεί αυτό της χωροθέτησης βιομηχανικών μονάδων πολλών διαφορετικών Τύπων. Τότε όμως το πρόβλημα της χωροθέτησης μη περιορισμένης δυναμικότητας βιομηχανικών μονάδων είναι πολυεπίπεδο (Multi-level Uncapacitated Facility Location Problem [2].

Αυτό σημαίνει ότι ένα προϊόν για να φθάσει στα καταναλωτικά κέντρα πρέπει προηγουμένως να περάσει πέραν της αρχικής επιχειρηματικής μονάδας και από άλλες οι οποίες βρίσκονται στο ενδιάμεσο της διαδρομής μεταξύ της πρώτης επιχειρηματικής μονάδας και του καταναλωτικού κέντρου.

Το πρόβλημα επιλύθηκε από τους Tcha και Lee [18] ορίζοντας την ταυτόχρονη εγκατάσταση των βιομηχανικών μονάδων κάθε επιπέδου έτσι ώστε το κέρδος που προκύπτει για αυτές από την εξυπηρέτηση της ζήτησης να είναι το μέγιστο λαμβάνοντας υπόψη το σταθερό κόστος που απαιτείται για την εγκατάσταση κάθε επιχειρηματικής μονάδας.

Η μοντελοποίηση του προβλήματος γίνεται ως εξής:
I = {1,…..,m} είναι το σύνολο των πελατών
L = ο αριθμός των επιπέδων
J_r = {1,…..,p_r} το σύνολο των σημείων που μπορεί να τοποθετηθεί μια βιομηχανία στο επίπεδο r
P = το σύνολο όλων των πιθανών διαδρομών από βιομηχανίες στο πρώτο επίπεδο σε αντίστοιχες του τελευταίου επιπέδου, δηλαδή
P={ (j_1,…..,j_L) : $j_r \in J_r$, r=1,…..,L }
P(j_r) = είναι το σύνολο όλων των πιθανών διαδρομών που περιλαμβάνουν την βιομηχανία j_r. Ισχύει ότι $P(j_r) \subseteq P$
f_{jr} = τα σταθερά κόστη που σχετίζονται με τη βιομηχανία j_r
c_{iw} = είναι το κέρδος που σχετίζεται με την κάλυψη της ζήτησης του πελάτη i διαμέσου της διαδρομής $w \in P$
x_{iw} = το κλάσμα της ζήτησης του πελάτη i που εξυπηρετείται από τη διαδρομή w= (j_1,…..,j_L)

Για κάθε επίπεδο r ισχύει τέλος:

$$Y_{jr} = \begin{cases} 1 & \text{εάν η επιχειρηματική μονάδα j στο επίπεδο r λειτουργεί} \\ 0 & \text{εάν όχι} \end{cases}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$\text{Max} \quad \sum_{i \in l} \sum_{w \in P} c_{iw} x_{iw} - \sum_{r=1}^{L} \sum_{j_r \in J_r} f_{j_r} y_{j_r} \qquad (1.7)$$

Με του εξής περιορισμούς:

$$\sum_{w \in P} x_{iw} = 1 \qquad \forall i \in l \qquad (1.8)$$

$$x_{iw} \le y_{j_r} \quad \forall i \in l, w \in P(j_r), j_r \in J_r r = 1,...,L \qquad (1.9)$$

$$y_{j_r} = 0,1 \qquad \forall j_r \in J_r, r = 1,...,L \qquad (1.10)$$

$$x_{i,w} \ge 0 \qquad \forall i \in l, w \in P(j_r), r = 1,..,L \qquad (1.11)$$

Η σχέση (1.8) υποδηλώνει ότι το κάθε καταναλωτικό κέντρο αντιστοιχεί σε μια διαδρομή. Η σχέση (1.9) ότι κάθε ζήτηση των κέντρων κατανάλωσης καλύπτεται. Η σχέση (1.10) δείχνει τις τιμές της μεταβλητής y_{j_r} που είναι 0 ή 1 και η σχέση (1.5) βεβαιώνει ότι η μεταφερόμενη ποσότητα μέσω της διαδρομής w προς το καταναλωτικό κέντρο i είναι μη αρνητικός αριθμός.

Σύγκριση υπαρχόντων μεθόδων με την προτεινόμενη λύση

Οι δύο προαναφερθείσες γενικές κατηγορίες προβλημάτων προσεγγίζουν το πρόβλημα υπό την στενή μαθηματική έννοια χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τις ρεαλιστικές συνθήκες της αγοράς όπως γίνεται στην παρούσα εργασία.

Παρακάτω περιγράφεται η μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος χωροθέτησης και κατανομής επιχειρηματικών μονάδων η οποία κατατάσσεται στη γενικότερη κατηγορία προβλημάτων χωροθέτησης και κατανομής πολλών επιπέδων. Η προσέγγιση του προβλήματος γίνεται υπό το καινοτόμο πρίσμα της μεταβολής του κόστους προμήθειας ανάλογα με την επίτευξη στόχων κατανάλωσης από τους πελάτες-καταναλωτές, αλλά και υπό τον έλεγχο της επάρκειας των πρώτων υλών.

Η μέχρι σήμερα προσέγγιση θεωρούσε το κόστος προμήθειας είτε σταθερό είτε γραμμικά μεταβαλλόμενο ανάλογα με την ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος χωρίς να λαμβάνει υπόψη την υπάρχουσα νοοτροπία της αγοράς σύμφωνα με την οποία η στοχοθέτηση επιπέδων κατανάλωσης οδηγεί σε διαφορετικά κόστη προμήθειας ανάλογα με την επίτευξη τους ή μή.

Περιγραφή του προβλήματος

Ο χώρος τον οποίο μελετούμε έχει τη μορφή ενός δικτύου, σε κάποιους από τους κόμβους του οποίου είναι εγκατεστημένα τα κέντρα ζήτησης (πελάτες), σε κάποια άλλα είναι εγκατεστημένα τα κέντρα παραγωγής πρώτων υλών, ενώ όλοι οι κόμβοι του είναι υποψήφιοι να υποδεχθούν εγκατάσταση κάποιας ή κάποιων βιομηχανικών μονάδων. Όπως φαίνεται ένας κόμβος λοιπόν του δικτύου μπορεί να είναι κέντρο ζήτησης ή κέντρο παραγωγής πρώτων υλών ή τόπος εγκατάστασης βιομηχανικών μονάδων ή οποιοσδήποτε συνδυασμός αυτών των τριών.

Οι οδοί μεταφοράς είναι τα τόξα του δικτύου επιτρέποντας την αμφίδρομη κίνηση σε αυτά. Εννοείται ότι η επιτρεπτή δυναμικότητα μεταφοράς στις προαναφερθέντες οδούς ανταποκρίνεται πλήρως στις απαιτήσεις του προβλήματος.

Σε ένα δίκτυο με n κόμβους δίδονται οι θέσεις g πελατών με γνωστή ζήτηση για ένα προϊόν. Το προϊόν αυτό για να κατασκευαστεί απαιτούνται x είδη πρώτων υλών που παράγονται σε συγκεκριμένους κόμβους του δικτύου. Ζητείται να βρεθεί ο αριθμός η δυναμικότητα και οι θέσεις των βιομηχανικών μονάδων που θα καλύπτουν πλήρως τη ζήτηση εφόσον γνωρίζουμε τις αποστάσεις μεταξύ των κόμβων, το κόστος εγκατάστασης και λειτουργίας των μονάδων επίσης γνωρίζουμε την ικανότητα προσφοράς προϊόντων υπό καθεστώς έκπτωσης και το ύψος της έκπτωσης για κάθε επιχειρηματική μονάδα. Η λειτουργία των μονάδων είναι βιώσιμη εφόσον η παραγωγή της είναι μεγαλύτερη του κατωφλίου παραγωγής. Για κάθε μια από τις βιομηχανικές μονάδες θα πρέπει να επενδυθεί το μικρότερο δυνατόν αρχικό κεφάλαιο έτσι ώστε να παράγει την μέγιστη δυνατή ποσότητα τελικού προϊόντος με το χαμηλότερο δυνατό κόστος λειτουργίας.

Βασική προϋπόθεση για την περαιτέρω επεξεργασία του προβλήματος αποτελεί το γεγονός ότι τα κέντρα παραγωγής πρώτων υλών, οι βιομηχανικές μονάδες αλλά και τα καταναλωτικά κέντρα θα πρέπει να θεωρείται ότι βρίσκονται πάνω στους κόμβους του υπάρχοντος δικτύου. Η προϋπόθεση αυτή συνάγεται από το λεγόμενο Θεώρημα του Hakimi (“Hakimi theorem” ή ”the node property”) [7] στο οποίο αναφέρεται ότι στη βέλτιστη λύση, δεδομένης της αντικειμενικής συνάρτησης, όλα τα κέντρα παραγωγής (βιομηχανικές μονάδες) θα πρέπει να βρίσκονται πάνω στους κόμβους του δικτύου.

Για την επίλυση του προβλήματος πρώτα βρίσκουμε τους συντομότερους δρόμους που συνδέουν κάθε κόμβο του δικτύου με όλους τους υπόλοιπους [19]. Κατόπιν η πρώτη φάση επίλυσης περιλαμβάνει την παραγωγή μιας μονάδας τελικού προϊόντος που αυτή με τη σειρά της απαιτεί μια μονάδα από κάθε απαιτούμενο είδος πρώτης ύλης.

Κατόπιν αφού έχουμε βρει τον κόμβο που τροφοδοτεί κάθε καταναλωτικό κέντρο, μεταφέρουμε σε αυτόν όλη τη ζήτηση. Έπειτα καθορίζουμε τις δυναμικότητες παραγωγής και την ικανότητα παραγωγής τελικών προϊόντων που θα διατεθούν υπό καθεστώς έκπτωσης και επιλύουμε το ιδιότυπο πρόβλημα μεταφοράς που σχηματίζουμε. Το αποτέλεσμα αποτελεί λύση του προβλήματος που πρέπει όμως να βελτιστοποιήσουμε.

Στη διαδικασία της βελτιστοποίησης, αφού γνωρίζουμε τις ποσότητες των πρώτων υλών που απαιτεί κάθε μονάδα επιλύουμε ξανά το πρόβλημα με νέες κατανομές πρώτων υλών. Όταν προκύψουν όμοιες διαδοχικά λύσεις αυτές θα αποτελούν τη βέλτιστη λύση.

Χρησιμοποιούμενοι στο πρόβλημα συμβολισμοί

- u_i: κόμβος του δικτύου που μπορεί να είναι κόμβος εγκατάστασης παραγωγικών κέντρων πρώτων υλών ή κόμβος εγκατεστημένων καταναλωτικών κέντρων ή κόμβος εγκατάστασης επιχειρηματικών μονάδων
- m : ο αριθμός των κόμβων του δικτύου
- g : ο αριθμός των κόμβων των καταναλωτικών κέντρων
- x : Τα είδη των πρώτων υλών $x = a,b,\dots,h$
- n_a, n_b … n_h : ο αριθμός των κόμβων των κέντρων παραγωγής της πρώτης ύλης $a,b,..,h$ αντίστοιχα
- d_{ij}: Η απόσταση μεταξύ των κόμβων i και j του δικτύου
- c_{ixj}: Το κόστος μεταφοράς (ανά μονάδα μέτρησης του προϊόντος και ανά μονάδα μέτρησης του μήκους της απόστασης) της πρώτης ύλης $x = a,b,\dots,h$ από τον κόμβο παραγωγής της i στον κόμβο j
- c_{jk}: Το κόστος μεταφοράς του έτοιμου προϊόντος (ανά μονάδα μέτρησης του προϊόντος και ανά μονάδα μέτρησης του μήκους της απόστασης) από τον κόμβο j στον κόμβο k
- C_{jk}: Το κόστος μεταφοράς του έτοιμου προϊόντος από τον κόμβο j στον κόμβο k
- $\hat{C}_{jk}$: Το συνολικό κόστος προμηθείας ανά μονάδα μέτρησης του προϊόντος του έτοιμου προϊόντος που προμηθεύεται ο κόμβος k από επιχειρηματική μονάδα που βρίσκεται στον κόμβο j
- $\hat{C}^d_{jk}$: Το συνολικό κόστος προμηθείας ανά μονάδα μέτρησης του προϊόντος του έτοιμου προϊόντος που προμηθεύεται ο κόμβος k από επιχειρηματική μονάδα που βρίσκεται στον κόμβο j και είναι προϊόν εκπτωτικής παραγωγής.
- e: Το κατώφλι παραγωγής, ή το μικρότερο επιτρεπτό μέγεθος δυναμικότητας παραγωγής των βιομηχανικών μονάδων
- z_{ixj}: Το συνολικό κόστος μεταφοράς της πρώτης ύλης x από το κέντρο παραγωγής του κόμβου i στη επιχειρηματική μονάδα του κόμβου j
- $\hat{z}_{ixj}$: Το ελάχιστο συνολικό κόστος μεταφοράς της πρώτης ύλης x από το κέντρο παραγωγής του κόμβου i στη επιχειρηματική μονάδα του κόμβου j
- $\hat{z}_j$: Το ελάχιστο συνολικό κόστος μεταφοράς όλων των απαιτούμενων πρώτων υλών x από το κέντρα παραγωγής τους στη επιχειρηματική μονάδα του κόμβου j
- k_j: Το κόστος εγκατάστασης επιχειρηματικής μονάδας στον κόμβο j
- P_j: Η συνολική δυναμικότητα παραγωγής κανονικής απασχόλησης της επιχειρηματικής μονάδας που βρίσκεται στον κόμβο j
- P^d_j: Η συνολική δυναμικότητα εκπτωτικής παραγωγής της επιχειρηματικής μονάδας που βρίσκεται στον κόμβο j
- P^t_j Η απαιτούμενη συνολική ικανότητα παραγωγής του κόμβου j
- N : Ο αριθμός των κόμβων που εγκαθίστανται βιομηχανικές μονάδες

D_k : Η συνολική ζήτηση στο κέντρο κατανάλωσης που βρίσκεται στον κόμβο *k*

D_{xj}: Η συνολική ζήτηση πρώτης ύλης *x* από την αντίστοιχη επιχειρηματική μονάδα παραγωγής τελικού προϊόντος που βρίσκεται στον κόμβο *j*

Q_{ix}: Η συνολική δυναμικότητα παραγωγής πρώτης ύλης *x* από το αντίστοιχο κέντρο παραγωγής της πρώτης αυτής ύλης που βρίσκεται στον κόμβο *i*

Μεθοδολογική προσέγγιση

Ο παραπάνω τρόπος επίλυσης του προβλήματος αναλυτικά περιγράφεται βήμα προς βήμα στη παρακάτω αλγοριθμική διαδικασία:

Όπως ήδη έχει αναφερθεί έστω ένα δίκτυο Έστω *G= (V,e)* ένα δίκτυο με *V* κόμβους και *e* κλάδους. Το σύνολο *V* των κόμβων περιλαμβάνει όλους τους κόμβους u_j του δικτύου με *j=1,2,……., m*, όπου *m* ο συνολικός αριθμός των κόμβων του δικτύου και περιλαμβάνει τα υποσύνολα V_a, V_b, V_c,…. V_h στους κόμβους των οποίων βρίσκονται τα κέντρα παραγωγής των *a,b,..,h* πρώτων υλών, και το V_k στους κόμβους του οποίου βρίσκονται τα κέντρα κατανάλωσης.

Κάθε κόμβος μπορεί να είναι είτε κόμβος παραγωγής πρώτων υλών, είτε κόμβος εγκατάστασης επιχειρηματικής μονάδας, είτε κόμβος καταναλωτικού κέντρου, είτε και συνδυασμός όλων αυτών.

Ως κόστος μεταφοράς από τον κόμβο *i* προς τον κόμβο *j* εννοούμε το γινόμενο

$$z_{ij} = d_{ij} \times c_{ij} \qquad (4.1)$$

Για κάθε μια από τις *a,b,..,h* πρώτες ύλες σχηματίζουμε τον πίνακα με τα κόστη μεταφοράς. Για την πρώτη ύλη a σχηματίζεται ο πίνακας 2.1. Όμοια με αυτόν σχηματίζονται αντίστοιχα πίνακες για όλα τα είδη πρώτων υλών.

Για την πρώτη ύλη *a* επιλέγεται ως κόμβος προμηθείας του υποψηφίου κόμβου *j* αυτής της ύλης εκείνος ο κόμβος *i* που το κόστος μεταφοράς από τον *i* στον *j* είναι το μικρότερο δηλαδή:

$$\hat{z}_{iaj} = \min z_{iaj} \qquad (4.2)$$

Πίνακας 4.1: Κόστη μεταφοράς για την πρώτη ύλη *a*:

	u_1	u_2	..	u_j	u_m
u_{1a}	z_{1a1}	z_{1a2}	..	z_{1aj}	z_{1am}
u_{2a}	z_{2a1}	z_{2a2}	..	z_{2aj}	z_{2am}
..	..	..	..	..	..
u_{ia}	z_{ia1}	z_{ia2}	..	z_{iaj}	z_{iam}
u_{na}	z_{na1}	z_{na2}	..	z_{naj}	z_{nam}

Η σχέση (4.2) επεκτείνεται για όλες τις πρώτες ύλες αντίστοιχα δηλαδή για τον υποψήφιο κόμβο *j* το κόστος προμηθείας όλων των απαιτούμενων πρώτων υλών είναι:

$$\hat{z}_j = \min z_{iaj} + \min z_{ibj} + \dots\dots\dots + \min z_{ihj} \qquad (4.3)$$

Κατόπιν για το τελικό προϊόν σχηματίζω τον αντίστοιχο πίνακα κόστους μεταφοράς. Δηλαδή το στοιχείο C_{jk} παριστά το κόστος για τη μεταφορά μιας μονάδας ετοίμου προϊόντος από τον κόμβο παραγωγής j στον κόμβο κατανάλωσης k και ισχύει:

$$C_{jk} = c_{jk} \ x \ d_{ik} \qquad (4.4)$$

Όπου c_{jk} το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς του ετοίμου προϊόντος από τον κόμβο j προς τον κόμβο k και d_{ik} η αντίστοιχη απόσταση. Ο πίνακας που σχηματίζεται είναι διαστάσεων $m \ x \ g$ όπου m όλοι οι κόμβοι του δικτύου (υποψήφιοι προς εγκατάσταση βιομηχανικών μονάδων κόμβοι) ενώ όπου g το σύνολο των κόμβων που έχουν εγκατεστημένα καταναλωτικά κέντρα, προφανώς $m \geq g$.

Πίνακας 4.2 Κόστη μεταφοράς τελικού προϊόντος

	u_k	$u_{(k+1)}$	..	..	u_g
u_1	C_{1k}	$C_{1(k+1)}$	..	..	C_{1g}
u_2	C_{2k}	$C_{2(k+1)}$	..	..	C_{2g}
..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..
u_m	C_{mk}	$C_{m(k+1)}$	..	..	C_{mg}

Για κάθε θέση j έχουμε το κόστος εγκατάστασης και λειτουργίας k_j καθώς επίσης και το υπολογισμένο κόστος προμηθείας όλων των πρώτων υλών $\hat{Z}_j$. Έτσι σε κάθε θέση του πίνακα 2.2 προσθέτουμε τα παραπάνω κόστη σύμφωνα με τη σχ.(4.5)

$$\hat{C}_{jk} = C_{jk} + k_j + \hat{Z}_j \qquad (4.5)$$

Από τον πίνακα 4.2 προκύπτει ο πίνακας 4.3
Από τη σχ. (4.6) προκύπτει για κάθε κόμβο κατανάλωσης k ο κόμβος στον οποίο πρέπει να απευθυνθεί για να καλύψει τη ζήτηση του.

$$\min \hat{C}_{jk} \quad \text{για} \quad j = 1 - m \qquad (4.6)$$

Πίνακας 4.3 Κόστος προμηθείας τελικού προϊόντος

	u_k	$u_{(k+1)}$	..	..	u_g
u_1	$\hat{C}_{1k}$	$\hat{C}_{1(k+1)}$	..	..	$\hat{C}_{1g}$
u_2	$\hat{C}_{2k}$	$\hat{C}_{2(k+1)}$	..	..	$\hat{C}_{2g}$
..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..
u_m	$\hat{C}_{mk}$	$\hat{C}_{m(k+1)}$	..	..	$\hat{C}_{mg}$

Ο αριθμός N επομένως των κόμβων που θα φιλοξενήσουν κάποια ή κάποιες βιομηχανικές μονάδες μπορεί να είναι:

$$1 \leq N \leq g \qquad (4.7)$$

Η συνολική απαιτούμενη δυναμικότητα κάθε επιχειρηματικής μονάδας δεν μπορεί παρά να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του κατωφλίου παραγωγής.

$$\lambda e \le P^t_j < (\lambda+1)e \qquad (4.8)$$

όπου λ ακέραιος αριθμός

Άρα :

$$P^t_j = \lambda e + \xi e \qquad (4.9)$$

Με $\xi < 1$

Ορίζουμε ως αρχικό μέγεθος της επιχειρηματικής μονάδας

$$P_j = \lambda e \qquad (4.10)$$

Ορίζουμε τη δυναμικότητα της παραγωγής που μπορεί να διατεθεί υπό καθεστώς έκπτωσης ως:

$$P_j^d \le P_j \qquad (4.11)$$

Ο ορισμός στη σχ. (4.11) μπορεί να είναι και διαφορετικός.

Εάν $\lambda=1$ και $\xi e > P^d_j$ (4.12)

Τότε προκύπτει ένα τμήμα της ζήτησης το οποίο δεν μπορεί να καλυφθεί από τον συγκεκριμένο κόμβο παραγωγής ακόμη και μάλιστα υπό καθεστώς έκπτωσης.

Η ανικανοποίητη αυτή ποσότητα της ζήτησης είναι ίση με: $\xi e - \lambda e/2$. Η ποσότητα αυτή μεταφέρεται προς παραγωγή στον κόμβο με το αμέσως επόμενο σε αξία $\hat{C}_{jk}$ προκαλώντας αντίστοιχη αύξηση στο P_j και P^d_j αυτού του κόμβου. Το ίδιο κάνουμε για όλους τους κόμβους που ικανοποιούν τη σχέση (4.12) μέχρις ότου να μην υπάρχει κόμβος παραγωγής με αυτή τη ιδιότητα.

Εάν $\lambda=1$ και $\xi e \le P^d_j$ ή $\lambda \neq 1$ (4.13)

Τότε υποχρεωτικά ισχύει $\xi e \le P^d_j$ και ως εκ τούτου ζήτηση ποσότητας ίσης με ξe μπορεί να καλυφθεί και να διατεθεί υπό καθεστώς έκπτωσης.

Δημιουργούμε και τον πίνακα 4.4 ιδίων διαστάσεων με τον πιν. 4.3 που περιλαμβάνει όμως τα μειωμένα εκπτωτικά κόστη, προφανώς τα στοιχεία $\hat{C}^d_{ij}$ του νέου πίνακα έχουν τιμές μεγαλύτερες αυτών $\hat{C}_{ij}$ του πιν. 4.3

Πίνακας 4.4 Κόστος προμηθείας τελικού προϊόντος κατόπιν έκπτωσης

	U_k	$u_{(k+1)}$	..	..	u_g
u_1	$\hat{C}^d_{1k}$	$\hat{C}^d_{1(k+1)}$	..	..	$\hat{C}^d_{1g}$
u_2	$\hat{C}^d_{2k}$	$\hat{C}^d_{2(k+1)}$	..	..	$\hat{C}^d_{2g}$
..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..
u_m	$\hat{C}^d_{mk}$	$\hat{C}^d_{m(k+1)}$	..	..	$\hat{C}^d_{mg}$

Δημιουργούμε ένα ιδιότυπο πρόβλημα μεταφοράς[5], σύμφωνα με το οποίο οι κόμβοι u_j στους οποίους πρόκειται να εγκατασταθούν βιομηχανικές μονάδες διπλασιάζονται ως εξής:

Για κάθε κόμβο u_j δημιουργείται και ένας εικονικός κόμβος u^d_j. Στον πίνακα του προβλήματος μεταφοράς η γραμμή του κόμβου u^d_j βρίσκεται ακριβώς κάτω από τη γραμμή του κόμβου u_j.

Η δυνατότητα παραγωγής του κόμβου u_j είναι αυτή που ορίσθηκε από τη σχέση (4.10) και η δυνατότητα παραγωγής του κόμβου $u^d{}_j$ είναι αυτή που ορίζεται από τη σχέση (4.11).

Η ζήτηση D_k των κόμβων u_k είναι αυτή που ορίζεται από το πρόβλημα.

Πίνακας 4.5 Ιδιότυπο πρόβλημα μεταφοράς

	u_k	$u_{(k+1)}$	..	u_g	*SL*	*Παραγωγή*
u_1	$\hat{C}_{1k}$	$\hat{C}_{1(k+1)}$	..	$\hat{C}_{1g}$	*0*	P_1
$u^d{}_1$	$\hat{C}^d{}_{1k}$	$\hat{C}^d{}_{1(k+1)}$	..	$\hat{C}^d{}_{1g}$	*0*	$P^d{}_1$
u_2	$\hat{C}_{2k}$	$\hat{C}_{2(k+1)}$	..	$\hat{C}_{2g}$	*0*	P_2
$u^d{}_2$	$\hat{C}^d{}_{2k}$	$\hat{C}^d{}_{2(k+1)}$	..	$\hat{C}^d{}_{2g}$	*0*	$P^d{}_2$
..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..
u_m	$\hat{C}_{mk}$	$\hat{C}_{m(k+1)}$	..	$\hat{C}_{mg}$	*0*	P_m
$u^d{}_m$	$\hat{C}^d{}_{mk}$	$\hat{C}^d{}_{m(k+1)}$	..	$\hat{C}^d{}_{mg}$	*0*	$P^d{}_m$
Ζήτηση	D_k	$D_{(k+1)}$	..	D_g	D_{SL}	

Με αυτό τον τρόπο περαιτέρω επεξεργασίας όμως το πρόβλημα έχει μετατραπεί σε πρόβλημα μεταφοράς με περίσσεια παραγωγής και αυτό γιατί[20],[22],[23]:

$$\sum_{j=1}^{m}(P_j + P_j^d) \succ \sum_{k=1}^{g} D_k \qquad (4.14)$$

Επομένως για να μπορούμε να επεξεργαστούμε περαιτέρω το πρόβλημα δημιουργούμε ένα εικονικό καταναλωτή *SL* και προσθέτουμε μια επιπλέον στήλη στον παραπάνω πίνακα που θα παριστά τον εικονικό κόμβο στον οποίο είναι εγκατεστημένος ο εικονικός καταναλωτής *SL*.
Τα στοιχεία $\hat{C}_{jSL}$ και $\hat{C}^d{}_{jSL}$ αυτής της στήλης θα είναι όλα μηδενικής αξίας

$$\hat{C}_{jSL} = 0 \quad \text{για} \quad \forall j \qquad (4.15)$$

$$\hat{C}^d{}_{jSL} = 0 \quad \text{για} \quad \forall j \qquad (4.16)$$

Η δε ζήτηση αυτού του κόμβου θα είναι ίση με τη διαφορά της συνολικής ικανότητας παραγωγής και της συνολικής ζήτησης όλων των πραγματικών κέντρων ζήτησης.

$$V_{SL} = [\sum_{j=1}^{m}(P_j + P_j^d)] - [\sum_{k=1}^{g} D_k] \qquad (4.17)$$

Η τελευταία ενέργεια πριν την απόπειρα επίλυσης αυτού του ιδιότυπου προβλήματος μεταφοράς συνίσταται στην αντικατάσταση των στοιχείων $\hat{C}_{jk}$ και $\hat{C}^d{}_{jk}$ εκείνων των κόμβων j που δεν εξυπηρετούν καταναλωτικά κέντρα που βρίσκονται στον κόμβο *k*. Η αντικατάσταση γίνεται με τεράστιους αριθμούς της τάξης του +∞ για να αποτρέψουμε κατανομή σε αυτούς τους κόμβους. Στον παρακάτω τελικό πίνακα 2.6 που αποτελεί ένα τυχαίο παράδειγμα αυτοί οι αριθμοί συμβολίζονται με *M*.[5]

Πίνακας 4.6 Ιδιότυπο πρόβλημα μεταφοράς με περίσσεια παραγωγής

	u_k	$u_{(k+1)}$	..	u_g	*SL*	*Παραγωγή*
u_1	*M*	*M*	..	$\hat{C}_{1g}$	*0*	P_1

$u^d{}_1$	M	M	..	$\hat{C}^d{}_{1g}$	0	$P^d{}_1$
u_2	$\hat{C}_{2k}$	$\hat{C}_{2(k+1)}$	..	M	0	P_2
$u^d{}_2$	$\hat{C}^d{}_{2k}$	$\hat{C}^d{}_{2(k+1)}$	..	M	0	$P^d{}_2$
..	..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..
u_m	M	M	..	$\hat{C}_{mg}$	0	P_m
$u^d{}_m$	M	M	..	$\hat{C}^d{}_{mg}$	0	$P^d{}_m$
Ζήτηση	D_k	$D_{(k+1)}$	..	D_g	D_{SL}	

Αν παρ' ελπίδα στην σχ. 4.14 έχουμε ισότητα δηλ.

$$\sum_{j=1}^{m}(P_j + P_j^d) = \sum_{k=1}^{g} D_k \qquad (4.18)$$

Τότε η στήλη με τον εικονικό πελάτη *SL* δεν απαιτείται αφού από τη σχ. (4.16) προκύπτει ότι $D_{SL}=0$

Είναι γνωστό πλέον ποια καταναλωτικά κέντρα εξυπηρετούνται από κάθε επιχειρηματική μονάδα και με ποιες ποσότητες προϊόντος. Είναι επίσης γνωστή η ποσότητα του προϊόντος που πρέπει να παράγει η κάθε επιχειρηματική μονάδα.

Η λύση που βρήκαμε με τις διαδικασίες που περιγράφηκαν μέχρι εδώ μας έδωσε ως αποτέλεσμα τον αριθμό, τη θέση και τη δυναμικότητα των βιομηχανικών μονάδων, την κατανομή της ζήτησης των καταναλωτικών κέντρων καθώς και τον τρόπο ικανοποίησης των αναγκών σε πρώτες ύλες των βιομηχανικών μονάδων.

Η ευρεθείσα αυτή λύση είναι βέλτιστη υπό την προϋπόθεση της απεριόριστης δυνατότητας παραγωγής των κέντρων παραγωγής πρώτων υλών.
Σχηματίζουμε τους πίνακες μεταφοράς για κάθε είδος πρώτης ύλης *a,b,..,h* (όπως π.χ. ο πίνακας 4.7 για τη πρώτη ύλη a) με κόστη μεταφοράς όπως έχουν υπολογιστεί αλλά με δυνατότητες προσφοράς και ζήτησης όπως έχουν πλέον προκύψει και επιλύουμε τα κλασσικά προβλήματα μεταφοράς που προκύπτουν ξεχωριστά για κάθε πρώτη ύλη[21],[22],[23]. Αν τα αποτελέσματα των προβλημάτων μεταφοράς, υποδεικνύουν ικανοποίηση αναγκών των βιομηχανικών μονάδων σε πρώτες ύλες, όπως αυτές που είχαν προκύψει μέχρι το προηγούμενο στάδιο, τότε η ευρεθείσα σε εκείνη τη φάση λύση είναι η βέλτιστη.

Πίνακας 4.7 Πίνακας μεταφοράς για την πρώτη ύλη *a*:

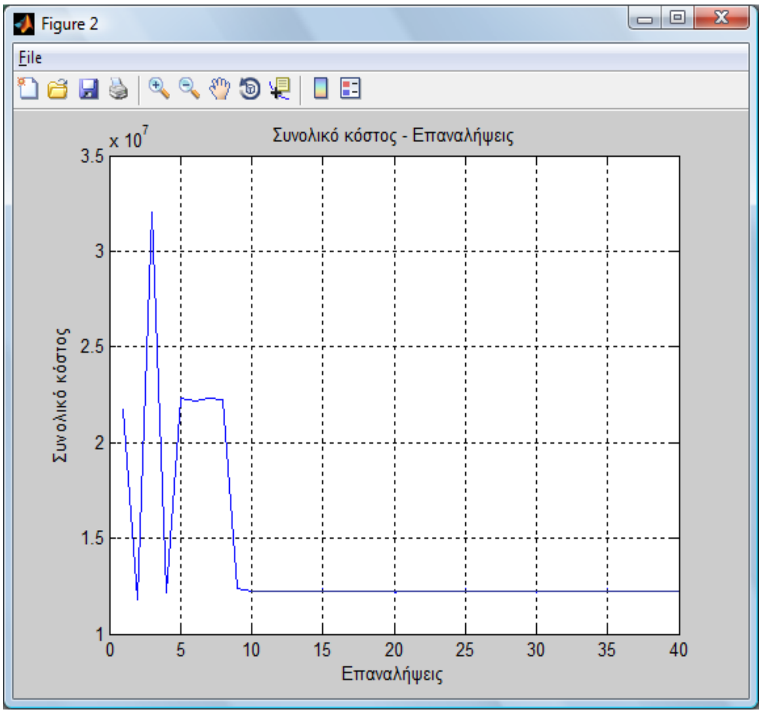
	u_1	u_2	..	u_j	u_m	
u_{1a}	z_{1a1}	z_{1a2}	..	z_{1aj}	z_{1am}	Q_{1a}
u_{2a}	z_{2a1}	z_{2a2}	..	z_{2aj}	z_{2am}	Q_{2a}
..	..	..	..	..	..	..
u_{ia}	z_{ia1}	z_{ia2}	..	z_{iaj}	z_{iam}	Q_{ia}
u_{na}	z_{na1}	z_{na2}	..	z_{naj}	z_{nam}	Q_{na}
	D_{a1}	D_{a2}		D_{aJ}	D_{am}	

Αν όμως, που είναι και το πιθανότερο, αλλάξει η κατανομή της ζήτησης σε πρώτες ύλες από τις βιομηχανικές μονάδες και ως εκ τούτου μεταβληθεί και το κόστος προμηθείας πρώτων υλών, τότε σχηματίζονται οι νέοι πίνακες κόστους προμηθείας πρώτων υλών και κατ' επέκταση οι πίνακες εγκατάστασης βιομηχανικών μονάδων.

Με τους νέους πλέον πίνακες επιλύεται το πρόβλημα, η νέα λύση αποτιμάται ως προς το συνολικό κόστος. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις όπου η αποτίμηση της νέας λύσης να είναι όμοια με την αμέσως προηγούμενη.

Αριθμητική εφαρμογή

Για την εφαρμογή της μεθόδου χρησιμοποιήθηκε ένα τυχαίο δίκτυο 32 κόμβων. Όλοι οι κόμβοι είναι υποψήφιοι για την εγκατάσταση επιχειρηματικών μονάδων, στους κόμβους 1-15 είναι εγκατεστημένα τα κέντρα ζήτησης με γνωστή τη ζήτηση του καθενός. Τα είδη των πρώτων υλών που απαιτούνται είναι 4 και είναι εγκατεστημένα στους κόμβους ως εξής: Της a πρώτης ύλης στους κόμβους 16,17 και 18 της b πρώτης ύλης στους κόμβους 19,20,21 και 22, της c πρώτης ύλης στους κόμβους 23 και 24, της d πρώτης ύλης στους κόμβους 25,26,27 και 28 με γνωστή την ικανότητα παραγωγής του καθενός. Είναι γνωστά τα κόστη μεταφοράς των πρώτων υλών και του τελικού προϊόντος από κάθε κόμβο προς όλους τους υπολοίπους. Είναι επίσης γνωστά τα κόστη εγκατάστασης και λειτουργίας μιας επιχειρηματικής μονάδας σε όλους τους κόμβους, τα επίπεδα των εκπτώσεων καθώς και το κατώφλι παραγωγής και η ικανότητα παροχής τελικών προϊόντων με έκπτωση. Η αναλογία κανονικής/εκπτωτικής διάθεσης του τελικού προϊόντος μπορεί να ορισθεί κατά το δοκούν.



Εικόνα 5.1: (Εξέλιξη του κόστους)

Στην εικ. 5.1 φαίνεται η εξέλιξη του κόστους (τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης της λύσης.

ΚΟΜΒΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΤΕΛΙΚΩΝ ΠΡΟΙΟΝΤΩΝ	**ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ**	**ΕΚΠΤΩΤΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ**
1	91,11	60,00
6	201,11	150,00
7	60,00	30,00
9	171,10	150,00
10	42,09	30,00
11	71,04	60,00
14	151,23	150,00
20	521,26	510,00
21	91,05	60,00
ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ	**12.148.016,39 €**	

Εικόνα 5.2 (Τελική κατανομή)

Στην εικόνα 5.2 παρουσιάζεται η τελική κατανομή και το αντίστοιχο κόστος καθώς και οι ποσότητες του τελικού προϊόντος με τον αντίστοιχο τρόπο διάθεσης.

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή αναπτύχθηκε η μεθοδολογία χωροθέτησης και κατανομής επιχειρηματικών μονάδων που λαμβάνει υπόψη στοιχεία της χρησιμοποιούμενης ευρέως εκπτωτικής πολιτικής στη διάθεση των παραγόμενων προϊόντων.

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε επιλύει το πρόβλημα βρίσκοντας μια βέλτιστη λύση. Κατόπιν έγινε επέκταση του προβλήματος σε ότι αφορά την βελτιστοποίηση της διάθεσης των πρώτων υλών. Η τελική λύση αφορά τόσο στη βέλτιστη κατανομή και διαχείριση των πρώτων υλών όσο και στη βέλτιστη κατανομή της ζήτησης με το ελάχιστο κόστος.

Βιβλιογραφία

Balinski, M. L., and P. Wolfe. 1963. *On benders decomposition and a plant location problem.* New Jersey: Mathematica Inc. Princeton.

Barros, A. I., and M. Labbe. 1994. "A General Model for the Uncapacitated Facility and Depot Location Problem." *Location science* 2 (3): 173-91.

Bhutta, S. K. 2004. "International Facility Location Decisions: A Review of the Modelling Literature." *International journal of intgrated supply management* 1 (1): 33-50.

Cheng-Liang, Chen, Wang Bin-Wei, and Lee Wen-Cheng. 2003. "Multiobjective Optimization for a Multienterprise Supply Chain Network." *Industrial & Engineering Chemical Research* 42 (9): 1879-89.

Daellenbach, H. G., and J. A. George. 1978. *Introduction to* operations *research techniques.* Boston: Allyn and Bacon Inc.

Eiselt, A. H., and G. Pederzoli. 1984. "A Location Problem in Graphs." *New Zealand Operational Research*(12): 49-53.

Hakimi, S. L. 1964. "Optimal Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph." *Operations Research*(12): 450-9.

Hakimi, S. L. 1965. "Optimal Distribution of Switching Centers in a Communication Network and some Related Theoretic Graph Theoretic Problems." *Operations Research*(13): 462-75.
Hakimi, S. L., ed. 1990. *Location with Spatial Interactions: Competitive Locations and Games. Discrete Location Theory.* NY: Wiley-Interscience.
Hakimi, S. L., and S. N. Maheshwari. 1972. "Optimum Locations of Centers in Networks." *Operations Research* 20 (5): 967-73.
Hamacher, W. H., and S. Nickel. 1998. "Classification of Location Models." *Location science* 6 : 229-42.
Handler, Gabriel Y., and Pitu B. Mirchandani. 1979. *Location on* Networks *Theory and Algorithms.* Cambridge: MIT Press.
Kuehn, A. A., and M. J. Hamburger. 1963. "A Heuristic Program for Locating Warehouses." *Management Science* 9 : 643-66.
Lee, M. Sang, and Lori Sharp Franz. 1979. "Optimising the Location-Allocation Problem with Multiple Obiectives." *Int. J. Phys.Distribution and Mutl. Management* 9 : 245-55.
Manne, A. S. 1964. "Plant Location Under Economies-of-Scale Decentralizationand Computation." *Management Science* 11:213-35.
Mesa, J., and B. Boffey. 1996. "A Review of Extensive Facility Location in Networks." *European Journal Of operational Research* 95 : 592-603.
Stollsteimer, J. F. 1963. "A Working Model for Plant Numbers and Locations." *Journal of Farm Economics* 45 : 631-45.
Tcha, D., and B. Lee. 1984. "A Branch-and-Bound Algorithm for the Multi-Level Uncapacitated Facility Location Problem." *European Journal of Operational Research* 18 : 35-43.
Καλφακάκου Γλυκερία. 2003. *Θεωρία γραφημάτων Δένδρα αποφάσεων χρησιμότητα θεωρία αξιοπιστίας.* Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης. Πολυτεχνική σχολή. Τμήμα πολιτικών μηχανικών.
Λουκάκης, Μανώλης. 1990. *Επιχειρησιακή Έρευνα.* Γ' Εκδοση. Θεσσαλονίκη: Εκδοτικό κέντρο Β. Ελλάδας.
Μπότσαρης, Χ. 1981. *Επιχειρησιακή έρευνα μέθοδοι και προβλήματα.* Αθήνα.
Σίσκος Γιάννης. 2000. *Γραμμικός προγραμματισμός.* Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.
Υψηλάντης, Π. 2006. *Επιχειρησιακή έρευνα. Εφαρμογές στη σημερινή επιχείρηση.* Αθήνα: Εκδόσεις Προπομπός.